СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

10 юни 2017 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- **Максималният брой точки** от трите части на изпита е **100**
- Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 20. се оценява както следва:

задачи от 1. до 10. – 2 точки **задачи от 11. до 20. – 3 точки**

1.	~~А~~	Б	В	Г	11.	А	~~Б~~	В	Г
2.	А	~~Б~~	В	Г	12.	А	Б	~~В~~	Г
3.	А	Б	В	~~Г~~	13.	А	~~Б~~	В	Г
4.	А	Б	В	~~Г~~	14.	А	Б	~~В~~	Г
5.	А	~~Б~~	В	Г	15.	А	Б	В	~~Г~~
6.	А	Б	~~В~~	Г	16.	~~А~~	Б	В	Г
7.	~~А~~	Б	В	Г	17.	А	Б	~~В~~	Г
8.	А	Б	~~В~~	Г	18.	А	Б	В	~~Г~~
9.	~~А~~	Б	В	Г	19.	~~А~~	Б	В	Г
10.	А	Б	В	~~Г~~	20.	А	~~Б~~	В	Г

- Правилно попълненият отговор на **всяка задача от 21. до 25.** се оценява с **4 точки**

21.	$\sqrt{3}$
22.	$x = 5$
23.	65 учебника по-малко
24.	4,25
25.	$PQ = 2$

- **Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.**

Задача 26. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} \dfrac{y^2+1}{x} - \dfrac{10x}{y^2+1} + 3 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{array} \right.$.

Решение: Допустими стойности за неизвестните са $x \neq 0$ и всяко $y \in \mathbb{R}$.

В първото уравнение полагаме $\dfrac{y^2+1}{x} = p$ и получаваме

$$p - \frac{10}{p} + 3 = 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad p^2 + 3p - 10 = 0.$$

Корените на последното уравнение са $p_1 = 2$ и $p_2 = -5$.

1) При $p_1 = 2$ дадената системата се свежда до

$$\left| \begin{array}{l} y^2 + 1 = 2x \\ x - 2y - 3 = 0 \end{array} \right. .$$

Тук от второто уравнение изразяваме $x = 2y + 3$ и заместваме в първото:

$$y^2 + 1 = 2(2y+3), \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 - 4y - 5 = 0.$$

Намираме корените $y_1 = 5$ и $y_2 = -1$ и решения на дадената система са $(x_1; y_1) = (13; 5)$, $(x_2; y_2) = (1; -1)$.

2) При $p_2 = -5$ свеждаме дадената система до

$$\left| \begin{array}{l} y^2 + 1 = -5x \\ x - 2y - 3 = 0 \end{array} \right. .$$

Отново заместваме $x = 2y + 3$ в първото уравнение:

$$y^2 + 1 = -5(2y+3), \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 + 10y + 16 = 0.$$

Корените на последното уравнение са $y_3 = -2$ и $y_4 = -8$ и за решения на системата в този случай намираме $(x_3; y_3) = (-1; -2)$, $(x_4; y_4) = (-13; -8)$.

Окончателно, решенията на дадената система са $(x_1; y_1) = (13; 5)$, $(x_2; y_2) = (1; -1)$, $(x_3; y_3) = (-1; -2)$ и $(x_4; y_4) = (-13; -8)$.

Задача 27. Хвърляме два разноцветни зара едновременно. Да се намери вероятността произведението на точките от двата зара да бъде по-голямо от удвоения им сбор.

Решение: Нека при хвърляне на заровете, единият зар показва a точки, а другият b точки. Тъй като $a, b \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, то броят на всички възможни изходи при хвърляне на два зара е $6 \times 6 = 36$.

В таблицата долу са разписани всички възможности при хвърляне на два зара, като на съответния ред, заедно с броя на точките a и b са пресметнати произведението $a \times b$ и удвоеният сбор $2(a+b)$.

a	b	$a \times b$	2(a+b)
1	1	1	4
1	2	2	6
1	3	3	8
1	4	4	10
1	5	5	12
1	6	6	14
2	1	2	6
2	2	4	8
2	3	6	10
2	4	8	12
2	5	10	14
2	6	12	16
3	1	3	8
3	2	6	10
3	3	9	12
3	4	12	14
3	5	15	16
3	6	18	18

a	b	$a \times b$	2(a+b)
4	1	4	10
4	2	8	12
4	3	12	14
4	4	16	16
4	5	20	18
4	6	24	20
5	1	5	12
5	2	10	14
5	3	15	16
5	4	20	18
5	5	25	20
5	6	30	22
6	1	6	14
6	2	12	16
6	3	18	18
6	4	24	20
6	5	30	22
6	6	36	24

Благоприятните изходи при хвърляне на заровете, при които $a \times b > 2(a+b)$ са:

$$(a; b) \in \big\{(4;5),\ (4;6),\ (5;4),\ (5;5),\ (5;6),\ (6;4),\ (6;5),\ (6;6)\big\},$$

т.е., общо 8 на брой.

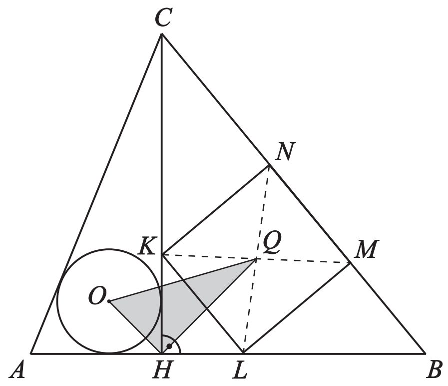
Следователно търсената вероятност е $P = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

Задача 28. В $\triangle ABC$ е прекарана височината CH $(H \in AB)$, като $AH = 5$, $BH = 9$, $CH = 12$. В $\triangle AHC$ е вписана окръжност с център O и радиус r. В $\triangle BHC$ е вписан квадрат $KLMN$ $(K \in CH,\ L \in BH$ и $M, N \in BC)$, както е показано на чертежа, и нека Q е пресечната точка на диагоналите на квадрата. Да се намерят дължината на радиуса r, дължината на страната на квадрата $KLMN$ и лицето на $\triangle OHQ$.

Решение: От питагоровата теорема за $\triangle AHC$ имаме $AC = \sqrt{AH^2+CH^2} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$. За радиуса r на вписаната окръжност намираме $r = \dfrac{AH + CH - AC}{2} = \dfrac{5+12-13}{2} = 2$.

Триъгълникът BHC също е правоъгълен и тогава $BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

Да означим с x дължината на страната на квадрата $KLMN$ и $\beta = \sphericalangle HLK = \sphericalangle HBC$. От $\triangle BHC$: $\cos\beta = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$ и $\sin\beta = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$.



В $\triangle HKL$ имаме $HL = KL\cos\beta = \dfrac{3}{5}\,x$ и следователно $BL = BH - HL = 9 - \dfrac{3}{5}\,x$.

В $\triangle BLM$ от $LM = BL\sin\beta$ получаваме последователно $x = \left(9 - \dfrac{3}{5}\,x\right)\dfrac{4}{5}$, $37x = 180$, $x = \dfrac{180}{37}$.

Разглеждаме $\triangle HLQ$: $HL = \dfrac{3}{5}\,x$, $QL = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x$, $\sphericalangle HLQ = \beta + 45^\circ$. От косинусовата теорема:

$$\begin{aligned}
HQ^2 &= HL^2 + LQ^2 - 2\,HL\,.\,LQ\cos(\beta + 45^\circ)\\
&= \left(\frac{3}{5}\,x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{5}\,x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\,(\cos\beta\cos 45^\circ - \sin\beta\sin 45^\circ)\\
&= \frac{9}{25}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{5}\,x^2\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \left(\frac{9}{25} + \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{10}\right)x^2 = \frac{18+25+6}{50}\,x^2 = \frac{49}{50}\,x^2.
\end{aligned}$$

Оттук, $HQ = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}\,x = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}\cdot\dfrac{180}{37}$, т.е. $HQ = \dfrac{126\sqrt{2}}{37}$.

Тъй като $\sphericalangle LHK + \sphericalangle LQK = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, около четириъгълника $HLQK$ можем да опишем окръжност. Тогава $\sphericalangle QHK = \dfrac{1}{2}\ \widehat{QK} = \sphericalangle QLK$, а $\sphericalangle QLK = 45^\circ$. Следователно, $\sphericalangle QHK = 45^\circ$.

В $\triangle AHC$ правата HO разполовява правия ъгъл $\sphericalangle AHC$, откъдето $\sphericalangle OHC = 45^\circ$.

Разглеждаме $\triangle OHQ$. Поради $\sphericalangle OHQ = \sphericalangle OHC + \sphericalangle QLK = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, $\triangle OHQ$ е правоъгълен. Дължините на катетите му са съответно, $OH = \sqrt{2}\,r = 2\sqrt{2}$ и $HQ = \dfrac{252}{37\sqrt{2}}$.

Следователно, за лицето S на $\triangle OHQ$ намираме

$$S = \frac{1}{2}\,OH\,.\,HQ = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{126\sqrt{2}}{37} = \frac{252}{37}.$$