Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Писмен конкурсен изпит по математика II

17 юни 2018 година

Тема №2

Примерни решения

Задача 1. Да се реши неравенството:

$$\left(x^6-7x^3-8\right)\left(x^2-4\right)\le 0 \quad .$$

Решение: Имаме

$$x^6-7x^3-8=\left(x^3+1\right)\left(x^3-8\right)=(x+1)\left(x^2-x+1\right)(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$$

и $x^2-4=(x-2)(x+2)$, т.е. неравенството е еквивалетно на

$$(x+2)(x+1)(x-2)^2\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+2x+4\right)\le 0 \quad ,$$

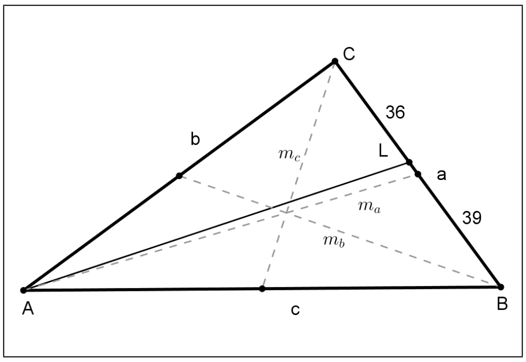
или, понеже $x^2-x+1>0$ и $x^2+2x+4>0$ за всяко реално число x, на

$$(x+2)(x+1)(x-2)^2\le 0 \quad .$$

Числото 2 е решение на неравенството. При $x\neq 2$ е изпълнено $(x-2)^2>0$, т.е. имаме $(x+2)(x+1)\le 0$ с решения числата от интервала $[-2,\,-1]$.

Отговор: $[-2,\,-1]\cup\{2\}$.

Задача 2. AL $(L\in BC)$ е ъглополовяща в правоъгълния триъгълник ABC $(\sphericalangle ACB=90^\circ)$. Да се намерят медианите на триъгълника, ако $CL=36$ и $BL=39$.



Решение: Използваме стандартните означения $a,\ b,\ c$ и $m_a,\ m_b,\ m_c$. Тогава $a=75$ и, понеже AL е ъглополовяща, $b:c=36:39$, т.е. $b=12k,\ c=13k$ за $k>0$. Питагоровата теорема дава $75^2+(12k)^2=(13k)^2$, откъдето $k=15$. Следователно $b=180,\ c=195$. Тогава $m_c=\dfrac{c}{2}=\dfrac{195}{2}$, $m_a=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b^2}=\dfrac{15}{2}\sqrt{601}$ и $m_b=\sqrt{\dfrac{b^2}{4}+a^2}=15\sqrt{61}$.

Отговор: $\dfrac{15}{2}\sqrt{601}$, $15\sqrt{61}$, $\dfrac{195}{2}$

Задача 3. Сумата на членовете на аритметична прогресия е -66. Да се намери броят на членовете на прогресията, ако сумата на първите пет члена е 0, а сумата от квадратите на същите членове е 40.

Решение: Нека прогресията е $a_1,\,a_2,\,\ldots\,a_n$ с разлика d.
По условие $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$. От $a_1+a_5=a_2+a_4=2a_3$ намираме $a_3=0$. Тогава $a_1=-2d$, $a_2=-d$, $a_4=d$, $a_5=2d$. От условието $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=40$ получаваме

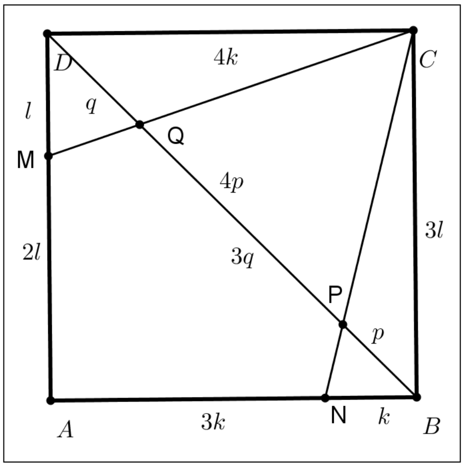
$d^2 = 4$. Случаят $d = 2$ е невъзможен, защото тогава членовете на прогресията след петия са положителни числа, т.е. сумата на всички членове е положителна.

При $d = -2$ имаме $a_1 = 4$ и, следователно, броят на членовете n удовлетворява уравнението $-66 = \dfrac{n}{2}(2.4 - 2(n-1))$ с корени -6 и 11, като само вторият е естествено число.

Отговор: Търсеният брой е 11.

Задача 4. Точките M и N лежат на страните AD и AB на квадрат $ABCD$, като $AM : MD = 2 : 1$ и $AN : NB = 3 : 1$. Да се намери отношението $BP : PQ : QD$, където P е пресечната точка на BD и CN, а Q е пресечната точка на BD и CM.

Решение: Нека $MD = l$. Тогава $AM = 2l$ и $BC = 3l$. $\triangle MQD \sim \triangle CQB$, защото $AD \parallel BC$. Следователно $QD : QB = MD : CB = 1 : 3$, т.е. $QD = q$, $QB = 3q$. Аналогично, нека $NB = k$. Тогава $AN = 3k$ и $CD = 4k$. $\triangle NPB \sim \triangle CPD$, защото $AB \parallel CD$. Следователно $PB : PD = NB : CD = 1 : 4$, т.е. $PB = p$, $PD = 4p$. Понеже $4q = BQ + QD = BD = BP + PD = 5p$, можем да считаме, че $q = 5u$ и $p = 4u$. Тогава $CD = 20u$, $BP = 4u$ и $QD = 5u$. Следователно, $PQ = BD - BP - QD = 11u$.



Отговор: $BP : PQ : QD = 4 : 11 : 5$.

Задача 5. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} 6x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 - 3} = y \end{array} \right. .$$

Решение: Имаме $6x^2 - xy - 2y^2 = (2x+y)(3x-2y)$, т.е. решенията на системата са обединение на решенията на системите

$$\left| \begin{array}{l} y = -2x \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 - 3} = y \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} 2y = 3x \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 - 3} = y \end{array} \right. .$$

От първата, след заместване, получаваме уравнението

$\sqrt{(x+1)^2 + (-2x+1)^2 - 3} = -2x$, еквивалетно на системата

$(x+1)^2 + (-2x+1)^2 - 3 = 4x^2$, $x \le 0$. Уравнението е $x^2 - 2x - 1 = 0$ с корени $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$, като само първият е отрицателно число. Единственото решение на първата система е $\left(1 - \sqrt{2}\,;\ -2 + 2\sqrt{2}\right)$.

От втората система, след заместване $x = 2t$, $y = 3t$, получаваме уравнението

$\sqrt{(2t+1)^2 + (3t+1)^2 - 3} = 3t$, еквивалетно на системата

$(2t+1)^2 + (3t+1)^2 - 3 = 9t^2$, $t \ge 0$. Уравнението е $4t^2 + 10t - 1 = 0$ с корени $\dfrac{-5 - \sqrt{29}}{4}$ и $\dfrac{-5 + \sqrt{29}}{4}$, като само вторият е положително число. Единственото решение на втората система е $\left(\dfrac{-5 + \sqrt{29}}{2}\,;\ \dfrac{-15 + 3\sqrt{29}}{4}\right)$.

Отговор: $\left(1-\sqrt{2}\,;\ -2+2\sqrt{2}\right)$ и $\left(\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}\,;\ \dfrac{-15+3\sqrt{29}}{4}\right)$.

Задача 6. Да се реши неравенството:

$$\log_{x-2}(5x+4)\cdot\log_{x-2}\frac{5x+4}{x-2}\ \le\ 2 \quad .$$

Решение: Фукциите в лявата част са дефинирани при $x-2>0$, $x-2\neq 1$, $5x+4>0$, $\dfrac{5x+4}{x-2}>0$, т.е. в множеството $(2,\,3)\cup(3,\,+\infty)$.

В него неравенството е еквивалентно на $\left(\log_{x-2}(5x+4)+1\right)\left(\log_{x-2}(5x+4)-2\right)\ \le\ 0$, т.е. на системата $-1\le\ \log_{x-2}(5x+4)\ \le\ 2$, чиито решения са обединение на решенията на системите

$$\left|\begin{array}{c} 2\,<\,x\,<\,3 \\ \\ \dfrac{1}{x-2}\ \ge\ 5x+4\ \ge\ (x-2)^2 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left|\begin{array}{c} 3\,<\,x \\ \\ \dfrac{1}{x-2}\ \le\ 5x+4\ \le\ (x-2)^2 \end{array}\right. \quad .$$

Предвид $x-2>0$ те са еквивалетни на

$$\left|\begin{array}{c} 2\,<\,x\,<\,3 \\ 5x^2-6x-9\ \le\ 0 \\ x^2-9x\ \le\ 0 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left|\begin{array}{c} 3\,<\,x \\ 5x^2-6x-9\ \ge\ 0 \\ x^2-9x\ \ge\ 0 \end{array}\right. \quad .$$

Имаме $5x^2-6x-9\ \le\ 0$ за $x\in\left[\dfrac{3-3\sqrt{6}}{5},\,\dfrac{3+3\sqrt{6}}{5}\right]$, $5x^2-6x-9\ \ge\ 0$ за $x\in\left(-\infty\,,\,\dfrac{3-3\sqrt{6}}{5}\right]\cup\left[\dfrac{3+3\sqrt{6}}{5},\,+\infty\right)$, $x^2-9x\ \le\ 0$ за $x\in[0\,,\,9]$ и $x^2-9x\ \ge\ 0$ за $x\in(-\infty\,,\,0]\cup[9\,,\,+\infty)$. Следователно, решенията на първата система са $\left(2\,,\,\dfrac{3+3\sqrt{6}}{5}\right]$, а на втората — $[9\,,\,+\infty)$.

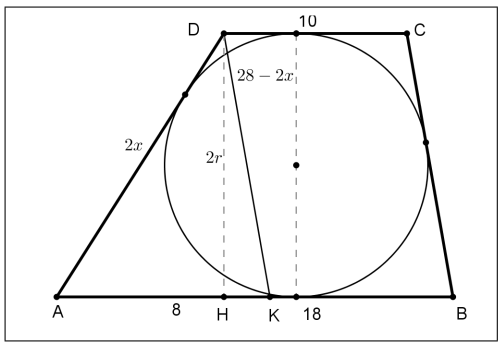
Отговор: $\left(2\,,\,\dfrac{3+3\sqrt{6}}{5}\right]\cup[9\,,\,+\infty)$.

Задача 7. Трапец с основи 10 и 18 е описан около окръжност. Да се намери възможно най-големият радиус на окръжността.

Решение: Нека трапецът е $ABCD$, $AB\parallel CD$, $AB=18$, $CD=10$. Понеже е описан, то $BC+AD=AB+CD=28$ и $DH=2r$, където DH е височината, а r — радиусът на вписаната окръжност. Нека $K\in AB$ е такава, че $KD\parallel BC$. Тогава $KD=BC$ и $AK=AB-CD=8$. Ако $AD=2x$, то лицето на $\triangle AKD$ е (съгласно Хероновата формула) $S_{AKD}=\sqrt{18.10.\,(18-2x)\,(2x-10)}=12\sqrt{5}\,.\sqrt{(9-x)\,(x-5)}$. Следователно,

$$r=\frac{1}{2}\cdot\frac{2S_{AKD}}{AK}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\,.\sqrt{(9-x)\,(x-5)}.$$

Най-голямата стойност на квадратната функция $(9-x)\,(x-5)$ е 4 и се достига за $x=7$, което означава, че е най-голяма стойност и в интервала $(5,\,9)$. Понеже функцията $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\,.\sqrt{t}$ е строго растяща, то най-голямата възможна стойност на r е $3\sqrt{5}$.

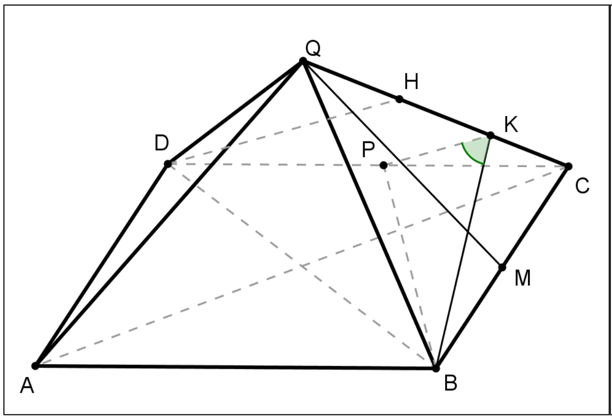


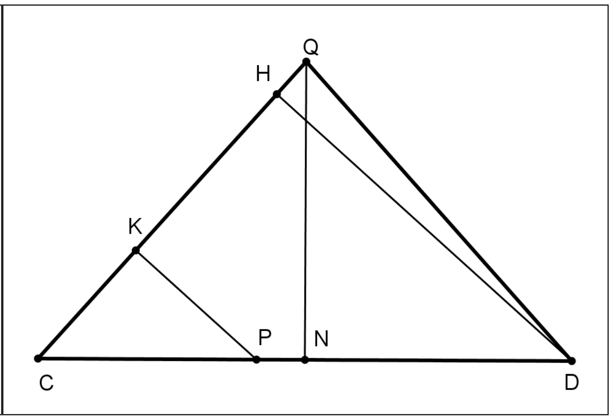
Отговор: $3\sqrt{5}$.

Задача 8. Основата $ABCD$ на пирамида $ABCDQ$ е правоъгълник със страни $AB = 8$ и $BC = 4$, а всички околни ръбове имат дължина 5. Да се намери косинусът на ъгъла между стените BCQ и CDQ.

Решение: Нека $K \in CQ$ е такава, че $BK \perp CQ$ и $P \in CD$ е такава, че $PK \perp CQ$. Тогава ъгълът между стените BCQ и CDQ е $\sphericalangle BKP = \gamma$.

Имаме $CQ.BK = BC.QM = 2S_{BCQ}$, където M е средата на BC. Пресмятаме $QM = \sqrt{CQ^2 - CM^2} = \sqrt{21}$, $BK = \dfrac{BC.QM}{CQ} = \dfrac{4\sqrt{21}}{5}$, $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \dfrac{8}{5}$.





Нека $H \in CQ$ е такава, че $DH \perp CQ$. Тогава $CQ.DH = CD.QN = 2S_{CDQ}$, където N е средата на CD. Пресмятаме $QN = \sqrt{DQ^2 - DN^2} = 3$, $DH = \dfrac{CD.QN}{CQ} = \dfrac{24}{5}$, $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \dfrac{32}{5}$.

$\triangle CPK \sim \triangle CDH$, защото $PK \parallel DH$. Следователно, $KP : DH = CK : CH = 1 : 4$, откъдето $KP = \dfrac{6}{5}$, и $CP : CD = CK : CH = 1 : 4$, откъдето $CP = 2$.

Накрая, намираме $BP = \sqrt{BC^2 + CP^2} = 2\sqrt{5}$ и $\cos\gamma = \dfrac{BK^2 + KP^2 - BP^2}{2BK.KP} = -\dfrac{8}{3\sqrt{21}}$.

Отговор: $-\dfrac{8\sqrt{21}}{63}$