СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ.КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ЕВРИСТИКАТА – НАУКА, ИЗКУСТВО, ЗАНАЯТ

МОНОГРАФИЧЕН ТРУД

Иван Костадинов Тонов

София, 2012

Увод

Този труд е посветен на решаване на математически задачи, предимно на училищно ниво. Проследяването на резултатите в него не изисква повече от нормална базисна подготовка по математика, поне бегла идея какво е доказателство и владеене на логическото мислене. Този труд съдържа елементи от курсовете Съдържание и методика на извънкласната работа по математика, Компютърна евристика, Евристични стратегии за решаване на задачи по математика и Работа с талантливи ученици по математика, които авторът чете на студенти – бъдещи учители по математика, информатика и информационни технологии, в бакалавърското и магистърското направление. Традиционно обучението на тези студенти, което се извършва в университетите, включва стабилна базисна теоретична подготовка, усвояването на която изисква извършване на сериозно количество упражнения, чрез които се усвояват понятията, които влизат в изучаваните дисциплини. Това е неизбежно, защото изучаването на нови понятия в математиката без демонстрация на подходящи примери и варианти на приложения на теоремите, които изясняват тези понятия, е непълноценно и не създава трайни знания и умения. Липсата на достатъчно часове при изучаването на различните математически дисциплини, както и традициите на обучението, прави невъзможно отделяне на време за решаване на задачи и постепенно уменията да се решават задачи и да се преподава решаване на задачи отстъпват на по-заден план. Преподавателите в повечето случаи са загубили или не са своевременно натрупали опит в преподаване на решаване на задачи.

Затова допирът на учениците и студентите с математиката по време на тяхното обучение се изчерпва само със запаметяване на факти от теорията и прилагане на рутинни алгоритми. Независимо, че преобладаващата част от учениците и студентите не притежават необходимите умения за решаване на задачи по математика, може да се каже, че по света се наблюдава възникване и изграждане на солидна елитна култура за решаването на задачи, носители на която са преподаватели и студенти, преминали през различни форми на обучение в клубове, школи, кръжоци и др. Това са хора, които са участвали в най–разнообразните форми на математически състезания, конкурси, турнири, олимпиади и др. Тази култура започва да се изгражда и разпространява през началото на миналия XX век, но идеи за подобни инициативи можем да открием още по-назад в човешката история. Опитите за описание на тази култура са все още непълни, защото тя все още се развива и обогатява. Предстои активна изследователска дейност в това направление.

Независимо от разпространението на тази култура, повечето от учениците и студентите почти не са се докоснали до нея и по тази причина те не израстват като добри специалисти в решаването на задачи. Създава се неправилното убеждение, че само “избрани”, особено даровити, могат да овладеят изкуството да се решават задачи. Моят опит като преподавател в университета, като лектор в множеството школи, лектории, кръжоци, като ръководил на различни формации, взели участие в наши и международни състезания, обаче показва, че това убеждение може и трябва да се коригира. Съществуват множество прекрасни книги, интернет сайтове и други информационни материали, от които могат да са почерпят добри практики за успешно обучение. Основните

принципи, които са залегнали в изграждането на структурата на този труд, в които авторът безусловно вярва, са:

- ✓ Уменията за решаване на задачи могат да се преподават и да се изучава;
- ✓ Успехът в решаването на задачи зависи не само от задълбочените математически знания, които не подценяваме, но и от редица психологически фактори, като концентрация, поемане на риск, воля за извършване на определени действия, вяра в собствените сили, упоритост, търпение, услужлива памет и др.;
- ✓ Умението да се анализират данните на задачата и от там избор на подход към успешното атакуване на проблема;
- ✓ Владеене на богат арсенал от фолклорно известни техники като метода на пробите и грешките, работа отзад напред, допускане на противното, принцип на Дирихле, екстремални елементи, математическа индукция и др.

Споменах по-горе множеството от книги, някои сполучливи, други не чак толкова, от които учащият се може да се запознае с това "тайнствено изкуство" – решаването на задачи. В това отношение с най–голяма популярност се ползват сборниците с решени задачи. Много често обаче поместените в тях решения са не рационални, а някъде пък съвсем лаконични и не разкриват подхода за достигане на тези решения. Учащият се, който разчита на това как само от разглеждането на представителните примери в тези сборници, да достигне до по-висока степен на овладяване на методите за решаване на задачи, често остава разочарован и обезверен, че той никога няма да може да се справи с решенията на подобни задачи, защото според него те са много над неговите възможности. По тази причина считам,

че голяма част от особено инструктивните задачи трябва да бъдат снабдени с друг вид решения, от които да става ясно как авторът или друг индивид, поставен в неговата позиция достига до успешното решение. Ключът към разработването на тези нови описания на решенията е в овладяването на **евристиката**, дейност на която се разчита силно да подпомогне обучението в решаването на задачите.

Поставят се също и следните много важни въпроси: Трябва ли решаването на задачи (problem solving) да се обособи като отделен курс или като отделен елемент в гимназиите или университетите и в него да се обсъди ролята и мястото на решаването на задачи ? Какво внимание трябва да се обърне на процесите и средствата за решаване на задачи? Дали да се възприеме някакъв смесен подход, при който да се интегрират тези процеси в хода на естественото обучение като последното да се обогати с нови концепции и методи? Но по никакъв начин не се предлага да се обсъжда въпрос дали въобще да има елементи на problem solving в обучението или не. Ще се спрем по-подробно на това в изложението.

Тези проблеми са обект на обсъждане и в световен мащаб. Така например Н. Бранка (N. Branca) от Университета от Сан Диего, Калифорния, в доклада си за проведена научно изследователска година във Великобритания констатира: „Тук представям някои наблюдения върху опита относно решаването на задачи, развитието на учебните програми, научните изследвания и теоретични модели в Британия. В противовес на интересните наблюдения, след като посетих голямо количество училища, включително и тези препоръчани ми като много добри, където да запиша децата си, аз открих една обща липса на инструкции по отношение на решаването на задачи и в много случаи неграмотност от страна на учителите

относно решаването на задачи”. (N. Branca, Mathematical Problem Solving: Lessons from British Experience, 1985).

Това състояние на обучението по математика в Англия и Уелс става обект на сериозни дискусии. През 1978 г. е назначена от правителството комисия, която да оцени състоянието на обучението и да излезе с предложения за неговото подобряване. Като резултат от дейността на тази комисия се появява през 1982 г. документ, известен като Доклада Кокрофт (Cockroft Report). Решаването на задачите по математика заема съществено място в този доклад. Ето някои извадки от него:

“Уменията да се решават задачи са в сърцето на математиката. Математиката допринася полза единствено на този, който може да я прилага в разнообразни практически ситуации, които наричаме Problem Solving. Да отбележим, че решаването на задачи по математика не може да стартира, преди те да се преведат на езика на адекватните математически термини. Тази първа и съществена стъпка представлява огромно затруднение за голяма част от учениците – факт, на който често не се обръща внимание. На всеки стадий от курсовете по математика е необходимо учителят да помага на учениците да разберат как да използват понятията, как да поддържа навиците, които са усвоили по време на учебния процес и как да прилагат усвоените умения при решаване на задачи. Тези задачи трябва да се свързани едновременно както с приложенията на математиката с всекидневния живот, така и с абстрактни ситуации. “(Параграф 240).

Концепцията за изследванията в процеса на решаване на задачите се третира по подобен начин. Докладът обръща внимание

на препоръката, учителите да поощряват учениците при решаване на изследователски задачи.

“Идеята за изследванията е фундаментална, както при изучаване на самата математика, но също така и в осъзнаването на методите, при които математиката може да се използва при разширяване на знанията и при решаване на задачи от различни области Предполагаме, че има много учители, за които “математическото изследване” е в някакъв смисъл подобно на правенето на “проекти”, които през последните години станаха много популярни като средство за работа в много области на учебното съдържание, с други думи, тези математически изследвания са възможности за работа в разширени области, които могат да продължават спокойно и дълго време да се работят индивидуално или на малки групи (нищо ново под слънцето – бел. на автора). Независимо от това, че това е една от възможните форми на математическо изследване, без всяко съмнение, тази форма се нуждае от това да не е единствена (бел. на автора - основна). Като основно ниво, може би най-често срещаното, тези изследвания трябва да стартират с отговори от страна на учителя на ученическите въпроси или да са резултат от работата, която се извършва по време на процеса или е била завършена.”(Параграф 250)

Подобни констатации срещаме в много други страни. Така например още през 80-те години на миналия век в САЩ се стартират изследвания, които да анализират състоянието на подготовката на американските ученици по математика. Тези изследвания потвърждават слабото ниво на владеене на предмета в сравнение страни като Япония, Корея и др. Резултатите от тези изследвания стават основа на редица официални програмни документи на

различни национални организации и комисии в САЩ. В съответствие с предложенията на тези организации през 1986 г. е сформирана комисия по стандартите в областта на училищната математика. Основната задача на тази комисия е да разработи концепции за *математическата грамотност* в различните области на човешката дейност. Първите стандарти са публикувани от Националния съвет на учителите по математика в САЩ (National Council of Teachers of Mathematics – NCTM) през 1989 г. След това следват стандарти от 1991 г. , от 1995 г. , от 2000 г. и т.н. Процесуалната част на Стандарта е обща за всички американски училища. Тя съдържа конкретизация на целите, при които се формира математическата грамотност по следните четири позиции: *решаване на задача, комуникативни умения, логическо мислене и приложни умения.*

Позицията ”решаване на задачи” предполага учениците да формират умения за анализиране на проблемни ситуации, да събират необходимите данни за тяхното разрешаване, да формулират проблеми, да използват различни методи за решаване на задачи (с акцент върху многостъпковите и нестандартни задачи) , да интерпретират резултатите, да обобщават и достигат до нови задачи, да могат да проверяват правилността на своите решения.

В Концепцията за структурата и съдържанието на общото средно образование в Русия също се обръща внимание на ролята на задачите в обучението по математика. „Обучението по математика е преди всичко решаване на задачи. Съществува масив от математически въпроси, упражнения и задания, разнообразен по своята тематика, сложности и педагогически цели. Затова задачите трябва да се включат като главно средство за индивидуализация на

обучението по математика. Развитието на мисленето и способностите за математически дейности се осъществява в хода на самостоятелните разсъждения на учащите се над задачите. Умението да се решават задачи е критерий за успешност на обучението по математика. Диалогът учител – ученик се изгражда в хода на обсъждане на задачите и техните решения. Самостоятелната работа на учениците при решаване на задачите заема главно място в обучението по математика, което по същество ограничава сферата на информационно-разяснителните, пасивни методи и форми.”

Различията в преподаване на методи за решаване на задачи зависят много и от възрастта на обучаваните. Специфичните примери от изследванията в областта на решаване на задачи очертават приблизително границите и особеностите на различните възрастови групи. Счита се, че началото на по–интензивни занимания с деца, макар че това е доста индивидуално, е възрастта около 11-12 години, т.е. 5-6 клас. За по–ниската възраст 8-10 години се препоръчва смесен подход. В тази възраст е по-полезно децата да виждат, че задачите идват от реалността и необходимостта от активизиране на техните познания е далеч по–мотивирана или, с други думи, ситуациите трябва да се извлекат от техния собствен реален свят. Специалистите считат, че обучението в решаването на задачи е старт за развитие на математическите умения. Опитът при преподаването на решаване на математически задачи, особено при по-малките ученици, показва, че в повечето случаи те прибягват само до извършване на някои аритметични действия с дадените в условието числа, често хаотично и неосъзнато, без да се опитат да проникнат по–дълбоко в същината на условието на задачата, без да се опитат да прилагат някои естествени техники, като принципа на

пробите и грешките, да не говорим за по–професионални дейности, които учащите е добре да овладеят. Това обуславя необходимостта от специално внимание в обучението по математика и особено в обучението в решаване на задачи.

Що е математическа задача

Понятието задача не е от областта на математиката. То по–скоро се отнася към психологията, изкуствения интелект и кибернетиката, което на практика за математиците означава, че точно определение за задача, в смисъла на математиката, едва ли може да бъде формулирано. Различни автори, в зависимост от отношението си към процесите на науката и образованието, с които се занимават, дават различни трактовки на понятието задача и съответно влагат различно съдържание на приложението на задачите в образователния процес.

Понятието задача срещаме и в по-обобщен аспект в работите на изследователите от областта на математиката, т.е. схващането за задача като открит научен проблем. В това отношение един от големите математици на миналия век Давид Хилберт (Hilbert) в статията си “Mathematical Problems”, Bulletin of Amer.Math. Soc., 1902, разглежда задачата като предизвикателство, което науката създава. ”Така, както всяка човешка дейност предполага някаква цел, то математическото творчество предполага формулиране на задачи” . Чрез изследването на обектите математикът получава решения, които изискват откриване на нови методи и поставяне на нови проблеми, които разширяват научния хоризонт. В това отношение задачата на изследователя, веднъж поставена от него или някой друг, става достояние на цялото научно общество. Математиката се създава в процеса на формулирането и решаването на задачи.

През 1945 г. К. Данкер (Duncker) формулира следния тезис, който по същество е най-близко до психологическия аспект на понятието задача.

„Задача възниква, когато индивид има цел, за която не му е известен пътят за нейното достигане".

По-образно казано, задача имаме, когато съществува цел, която трябва да се достигне, но прекият път към тази цел е блокиран. Психолозите обикновено, както и Данкер по-горе, добавят, че ситуацията изисква присъствие на човек, който е приел да притежава задачата, т.е. като говорим за задача имаме предвид, че тя е задача за конкретен субект. Психолозите не конкретизират с този текст, че става дума за математическа задача, затова трябва да добавим още, че в определянето на задачата по математика би трябвало да се съдържа математическа терминология и символика, да се очаква намирането на отговора да бъде постигнато с прилагането на средствата на математиката. От тази гледна точка задачата трябва да се приеме като дейност на мотивиран субект. Тази субективната природа на понятието задача се приема от специалистите по математическо образование през последните 60-70 години, макар че е подложена на оживени дискусии през този период. Субективна природа на понятието задача означава, че някаква цел може да е задача за някой индивид, но да не е задача за друг, или даже нещо повече, може да е била задача за мен вчера, но вече да не е задача за мен днес.

Друг аспект на понятието задача търсим в педагогиката. Докато виждането на психолозите характеризира задачата като конструкция, то от педагогическа гледна точка задачата се разглежда като средство. Чрез това средство се определят целите на дисциплината

математика и се развиват необходимите умения при нейното усвояване. В книгата си “How to solve it?” Дьорд Поя пише: “ Пред учителя по математика се открива огромна отговорност. Ако той чувства, че трябва да запълни даденото му учебно време като упражнява учениците си само с прилагане на конкретни операции, той ще убие техния интерес, ще потисне тяхното интелектуално развитие, ще пропусне възможности. Но ако той предизвиква тяхното любопитство чрез поставяне на задачи, съобразени с техните знания и възможности и ги подпомогне при намиране на решенията им чрез подходящо поставени напътстващи въпроси, той може да култивира у тях вкус за независимо мислене.”

Тези два аспекта, от психологическа и педагогическа перспектива, заслужават внимание. Те не се конфронтират, а по-скоро се допълват и взаимно обогатяват. Докато първият се центрира около субекта, вторият – около дисциплината. Не е съвсем леко да се балансира между тези две крайности. И тук Поя вижда тази огромно отговорност, която лежи пред учителя по математика, а именно какво и как учителят трябва да извърши, така че, в интерес на учениците, да не спре тяхното интелектуално развитие и как те да преодолеят традиционните трудности, които съпътстват изучаването на математическите науки.

Накрая, като куриоз, ще приведа отговора на ученик от 4 клас на въпроса “Какво според теб е задача?”: “Мисля, че задача е група от думи, където има и числа”. Да отбележим, че много малка част от учениците и студентите се отпускат да дадат отговор на такъв въпрос и затова честното отношение на четвъртокласника заслужава уважение. То обаче показва някои от характерните представи на учениците за задачи, които са резултат от практиката им в часовете

по математика. Преобладаващата част от тях опитват само аритметични действия и притежават изключително ограничен репертоар от знания и умения за атакуване на задачите по математика. За тези умения и ролята на учителя за тяхното овладяване ще говорим по–нататък.

В научната литература често се обсъждат понятията задача, въпрос, упражнение като синоними. Но някои автори считат, че всяко от тези понятия има свой, различен от останалите, смисъл. Обикновено понятието упражнение отнасяме също към целенасочена дейност, но за разлика от задачата, пътят към достигането на поставената цел е открит. Това не означава, че не съществуват затруднения при изпълнението на упражнението. Ще дам някои примери за упражнения.

Да се пресметне $234^3 + 324^3$ *без калкулатор*.

Няма никакво съмнение – умножаваме и след това събираме. Ясно е какво и как се прави, но е скучно и дълго. Съществува голяма вероятност да се стигне до изчислителна грешка.

Запишете числото

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{99.100}$$

като несъкратима дроб.

На пръв поглед е налице отново едно скучно упражнение, защото трябва внимателно да извършваме операцията събиране на дроби 99 пъти, като се надяваме, че няма да допуснем грешки в отделните пресмятания. Но едно по-внимателно изследване може да разкрие други възможности. Например при събиране на първите два члена ще открием, че

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}.$$

Като към този резултат прибавим третото събираемо ще имаме

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3.4}=\frac{3}{4}.$$

След добавянето на четвъртото събираемо ще достигнем до сбор $\frac{4}{5}$. Тези наблюдения водят до предположението, че за всяко естествено число n ще е в сила равенството

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Сега вече можем да считаме, че сме изправени пред задачата: *Вярно ли е предположението, което направихме и ако това е така, как да го докажем?* Ако твърдението е вярно, прилагаме го за $n=99$, и достигаме до отговора $\frac{99}{100}$. Ако имаме опит с подобни задачи, това е също почти упражнение, защото прилагайки метода на математическата индукция, веднага ще завършим доказателството. Ако обаче нямаме такъв опит, полученото предположение си остава задача. Възможен е и друг подход при решаване на даденото упражнение (или задача). Забелязваме, че

$$\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2};\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \text{ и т.н. } \frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}.$$

Сега събирането на тези дроби, представени по указания начин, също води бързо към отговора. Последният пример показва, че разликата между задача и упражнение е доста размита и както стана дума по-рано, тя е резултат на субективната природа на тези понятия.Така текстовите задачи от училищната алгебра създават сериозни затруднения на учениците от гимназията, но те би трябвало да са

обикновени упражнения за студентите от педагогическите специалности по математика. Обикновено схващаме упражненията като съзнателно многократно повтаряне на сложни действия, алгоритми, процедури, опиращи се на различен, но свързан с целите на упражнението материал, с цел – овладяването на знания и умения. По такъв начин следвайки педагогическата перспектива, можем да наречем упражнението учебна задача, но не би трябвало тези две понятия (задача и упражнение) напълно да се отъждествяват. Отъждествяването на понятията задача и въпрос също не е съвсем състоятелно. Наистина, можем всяка задача да я схващаме като поставяне на някакъв въпрос, но далеч не всеки въпрос е задача. Да отбележим, че именно задачите и дейностите около решаването им са същността на обучението по математика, защото решаването на задачите изисква владеенето на определени знания и умения от една страна, а от друга чрез решаване на задачите се разширява обемът от знания за областта, от която е избрана задачата. На вида на тези необходими знания ще се спрем по-нататък.

Решаване на задачи (Problem Solving)

Изследователите в областта на решаване на задачи често биват упреквани, че не дават отговор на въпроса какво разбират под понятието решаване на задачи. Тук ще дадем едно кратно определение, като то ще се нуждае по-нататък от уточняване, разширяване и коментар. Отново се обръщаме към психологията като източник, разбира се. Ще използваме определението на Джон Андерсън от книгата му "Когнитивна психология и нейните приложения" като се съобразяваме с разбирането, че задачата е целенасочена дейност към обект, пътят към който не е известен (поне за субекта, който е приел задачата). По-образно: индивидът е поставен пред ситуация, която ще наричаме *дадено състояние* и той трябва да достигне до друга ситуация, която ще наричаме *целево състояние,* а не съществува очевиден преход от едното състояние към другото. Решаване на задачата, според Андерсън, е такава целенасочена дейност, която включва серия операции, съдържащи съществени когнитивни компоненти, където целта може да се изрази чрез термините на математическото съдържание, т.е. предвижването от даденото състояние към целевото чрез математически процедури. Някои автори сравняват решаването на задачи като "намиране на път през пропастта". Самият термин задача чрез своята двойствена перспектива (психологическа и педагогическа) изисква да се обсъдят дейностите около решаването на задачите. Двете важни части на решаването на една задача са представяне на задачата и търсене на средства за нейното решаване. От друга страна субективната природа на понятието задача води до парадокса, че веднъж открит подходът,

за голяма част от задачите, се превръща в алгоритъм за тяхното решаване, т.е. те престават да бъдат задачи, а упражнения. Затова в тази област трябва да се подхожда "екологично" – решил задача, създай нова на нейното място.

В книгата си "Математическо откритие" Поя коментира значението на решаването на задачите по следния начин: "Математическото "know-how" е много по-важно от натрупването на информация. Какво е "know-how" в математиката? Това е умението да се решават задачи – не само рутинни задачи, но и задачи, изискващи висока степен на независимост, преценка, оригиналност, творчество. Следователно първото и най-важно задължение на учителя в процеса на преподаването на математиката е да обръща сериозно внимание на методиката на решаване на задачи."

На не много категорично схващане се натъкваме в множеството класификации на задачите. Например Поя пак в книгата си "Математически открития" предлага класификация от педагогическата гледна точка на задачите.

1. *Едно правило под вашия нос* – тип задачи, които се решават чрез прилагане на правило, което току що е било представено или дискутирано (коментар на автора – това по-скоро може да се нарече непосредствено упражнение или илюстрация на метод).

2. *Приложение с избор* – задача, която може де се реши чрез прилагане на едно правило или процедура, дадени по-рано в клас, така че решаващият да трябва да определи кои от тях да използва (коментар на автора – това е също упражнение)

3. *Избор на комбинация* – задача, която изисква решаващият да приложи две или повече правила или примери, разгледани в клас.

4. *Подход към изследователско ниво* – задача, която изисква новаторска комбинация от правила или примери, но да има разклонения и изисква висока степен на независимост и правдоподобни разсъждения.

Колкото и да изглежда парадоксално, основните резултати от изследванията на специалистите по математическо образование през последните 50 години са насочени към задачите от тип 1. и тип 2. Но напоследък се наблюдава засилен интерес и към изследвания на задачи от тип 3. и тип 4. Нашето предпочитание ще е също в това направление. Отново ще отбележим размитите граници в тази класификация. Ще разгледаме един пример.

За всяко цяло число $n \geq 0$ *дефинираме* $f(n) = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$. *Да се докаже, че всяко* $n \geq 0$ *числото* $f(n)$ *има поне* n *различни прости делители.*

Задачата е давана на олимпиада в бившия СССР и даже там тя е създала сериозни затруднения. В тази формулировка задачата е взета от книгата на А. Енгел “Problem Solving Strategies”, където тя е предшествана от следната задача:

Да се докаже тъждеството

$$x^4 + x^2y^2 + z^4 = \left(x^2 + xy + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right).$$

Близостта на двете задачи създава “топла” връзка между тях. С $x = 2^{2^{n-1}}$, $y = 1$ и предложеното тъждество се вижда следното разлагане $f(n) = f(n-1)\left(2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1\right)$. Тази стъпка бихме могли да

отнесем към задача от тип 1., но сега ще следва използване на принципа на математическата индукция, т.е. избор на комбинирано приложение на две правила, което отнася задачата към тип 3. Но това не е всичко, индукцията осигурява част от информацията, т.е. наличието на поне $n-1$ различни прости делители. Намирането на поне още един, различен от вече намерените, ни въвлича в търсене на нова процедура, която от своя страна може още да се разклони. Следователно, даже доближаването до задача към тип 1 със задаване на помощното тъждество не прави задачата от този тип. В първоначалната си формулировка, както е била зададена на олимпиадата, това си е задача от тип 4. Подпомагането на решението чрез посочване на помощното тъждество, като е в книгата, е сериозна подсказка. Чрез това "подсказване" решението на задачата се облекчава. След използването му обаче задачата преминава в нова фаза – тя става нова задача. По-подробно въпросите за фазите, през които се развива едно решение ще бъдат коментирани по-нататък.

На решаването на задачите са посветени, както споменахме, множество изследвания и в момента може би това е най–активно разработваната област в математическото образование, макар да преобладават изследванията върху задачите от тип 1 и тип 2. Такива изследвания, които се концентрират върху задачи от тип 3 и тип 4 се отнасят към работата с различни според своя социален или възрастов състав групи от ученици. Нашето внимание ще е насочено към определен тип ученици и студенти, които можем да определим най-общо като обещаващи. Това са ученици, които са участвали в някои от състезанията по математика или олимпиадите, такива, които проявяват интерес да се занимават с математика, бих казал тези, които изпитват удоволствие при заниманията си с решаване на

задачи. Смятам, че с малко усилие, всеки ученик може да стане обещаващ. Поне на автора би му се е искало наистина да е така. Този контингент от ученици съставят обекта на изследването. Към този контингент естествено добавяме и студентите, които се готвят да станат преподаватели по математика.

За отговор на въпроса "Как се решават задачите?" е разумно да се обърнем към съчиненията на Д. Поя, даже и ако искаме да не се съгласим с всичко от тях. Все пак е несъмнено влиянието на Поя върху изследванията относно решаването на задачите. Препоръките на Поя са към изучаване на процесите, които прилагат хора от различните слоеве на обществото – ученици, студенти, професионални математици и др. Решаването на задачи е строго индивидуална дейност, но голяма част от тези дейностите могат не само да се опишат, но и да се подпомогнат в тяхното усвояване и овладяване. Съществена част от изследванията в Изкуствения интелект и компютърните симулации за решаване на задачи са повлияни от наблюденията на Поя. Но изследванията в областта на решаване на задачи не се ограничават само с Поя и нито даже с Данкер или другите представители на американската школа в математическото образование. Съществено влияние оказват и резултатите, получени от специалистите от бившия Съветски съюз, особено, що се отнася до ученици, проявяващи засилен интерес към занимания с математика.

Всички изследвания на съвременните специалисти показват, че решаването на задачите изисква богат запас от систематизирани знания от областта на задачата, богат запас от процедури за представяне и трансформиране на задачата и не най-маловажно - система за контрол, която да ръководи избора на знанията и

процедурите. Тези три съставки могат да са вложат в съвременните компютърни програми и да направят възможно използването на компютрите в обучението и практическото решаване на задачи. На тези въпроси ще се спрем по-нататък. А на въпроса "Как се решават задачите?" засега не сме в състояние да дадем задоволителен отговор.

Следващият по важност въпрос е "Как да се научим да решаваме задачи?". Изследователите съветват: "бавно, с търпение и много труд". В тази шега има голяма доза истина. Но този извод е резултат от наблюденията на изследователите върху поведението на различни индивиди при решаване на задачите и на типа инструкции, които преподавателите провеждат. Натрупаният изследователски материал ни дава основание да обособим тези изследвания в отделен клон на науката за преподаване на математиката, а именно Решаване на задачи, която е по-популярна чрез названието си на английски език като Problem Solving. Тази наука включва наблюденията върху поведението на различните индивиди в процеса на решаване на задачите. И в този смисъл ще се прави разлика между Problem Solving като наука и поведение и Solving Problems като дейности. Наблюденията върху успешната работа на експертите в областта на решаване на задачи дава добра идея, как да се решават някои типове задачи. Различните перспективи в преподаването на решаването на задачи, които доминират през последния половин век, изследователите разделят на следните пет категории: проникване, запаметяване, подражание, екипна работа и рефлексия.

- *Проникване* – През 50-те години на миналия век изследователите от областта на решаване на задачи като Ван Енген и др. препоръчват като най-добър начин за

учене на решаване на задачи е даването на голямо количество задачи за решаване. Идеята е учениците да се потопят в среда от задачи и в резултат необходимите техники да се абсорбират чрез процес, наподобяващ осмозата (проникването) в биологията. Опитът показва, че наистина този подход е необходимо условие за подобряване на уменията за решаване на задачи, но вероятно далеч не е достатъчно. В този дух остроумната реплика на Питър Халмош: ”Най-добрият начин да се научиш да решаваш задачи е да решаваш задачи!” подкрепя тази идея. Подходът да се решават самостоятелно количество задачи подобрява усвояването на техниките, но учениците ще изпитват сериозни затруднения, когато се изправят пред задача, която не са срещали в обучението си или на някой изпит. Тук важно е да се определи ролята на учителя.

- *Запаметяване* – Една идея в преподаването на методите за решаване на задачи е да се разложи решението на задачата на атомарни процедури, всяка от които да се изучава поотделно. По такъв начин развиваме алгоритмичното мислене и учениците остават “програмирани” да следват алгоритъма, за да достигнат до решението. Този подход би бил ефективен относно решаването на тесен клас задачи, но той не е ефективен в случаите, когато учениците не могат да влязат в алгоритъма или да разпознаят към кой от алгоритмите да се насочат. Учениците не винаги се ориентират по типа на задачата, за да приложат запаметения алгоритъм. (бел. на

автора – този подход срещаме в множеството курсове за подготовка на ученици за външно оценяване, зрелостни или кандидатстудентски изпити).

- *Подражаване* – Този подход се основава на схващането, че изучавайки моделни решения, направени от специалисти в решаване на задачите, ще се достигне до усвояването на високо ниво умения за решаване на задачи. Счита се, че експертите притежават висока доза интуиция, както и че владеят широк спектър от техники, които бързо и ефективно решават задачите. Тогава ученикът се научава да решава задачи като наблюдава подхода на специалист, най-често учител. Този подход предполага, че учителят ще изисква учениците да докладват своите решения. Човек учи математика като решава задачи, а не само като наблюдава как се решават. Затрудненията се появяват, когато ученикът не може да "пробие" моделното решение на специалиста и настъпва разочарование. Препоръчително е да са напишат експертните решения по по–достъпен начин, така че те да се разбират и усвояват по–леко от обучаваните .
- *Екипна работа* – Напоследък много активно се коментира работата в група, като средство за успешно решаване на задачи. Наблюдаваме това при решаване на проблеми, при създаване на документи, където "мозъчната атака" на екипа реализира проекти. Разработвайки близки до проблема идеи открито, където последните могат да се обогатяват и защитават, груповата дискусия може да подпомогне учениците и студентите да

се изчистят концепциите и преодолеят някои от трудностите, които биха били създадени, ако индивидът работи сам. Поя препоръчва работа в групи и самият той организира групова квалификация с учители. Идеята е екипната работа да се използва като инструмент за подобряване на уменията за решаване на задачи. Тя е в противовес на скучното и продължително мълчание в клас. В процеса на груповата работа могат да се проследят в развитие различни подходи и планове, даже и ако те не са съвсем пълноценни, да се споделят идеи, които възникнали у някого от групата да могат да се реализират от някой друг. Ролята на учителя е да стимулира работата в групата и да действа като модератор. На работата в малки групи ще се спрем по-нататък.

- *Рефлексия* – Определя се като процес на самопознанието на субекта чрез вътрешните психични дейности и състояния. Веднъж Джон фон Нойман казва: "Едно денонощие преди да докажете нещо, вие трябва да сте сигурни, че това е вярно". Това е потвърждение на професионалния опит на множеството математици, за които усетът, чувството за истина е развито до краен предел. На Джон Дюи принадлежи прекрасния тезис, че децата трябва да "*learn by doing*" , който по-късно е допълнен остроумно от Саймън Пейпърт: " *children learn by doing and by thinking what they do"*. В знаменитите си китайски лекции Ханс Фройдентал изяснява първоначалната си представа за рефлексията като

синоним на мислене. По-късно, той развива тази представа, като свързва това понятие с етапите на разсъждения при извършване на доказателствата.

По-нататък ще свържем тази класификация с евристиката. Сравняването на предложените методи на обучение на решаване на задачи трябва непременно да се свърже с познавателните (когнитивните) процеси на индивида, а това означава да се обърнем към науката, която се занимава с висшите умствени дейности (психологията). Безспорно успешни изследвания в областта на решаването на задачи са немислими без познания за процесите на мисловната дейност. Психолозите проявяват интерес към решаване на задачите в различни области, включително математиката. Резник (Resnick) и Форд (Ford) обобщават този подход, както следва: "Като психолози, отнасящи се специфично с математиката, имаме за цел за поставим същите въпроси, които експерименталната и развиваща психология поставят пред обучението, мисленето и интелекта, както и до фокусират тези въпроси към специфичната за дисциплината материя. Това означава, че вместо да си поставим въпроса " Какво е човек да мисли?", ние си поставяме въпроса "Какво е човек да мисли в областта на математиката?"

Аналогично и специалистите по математическо образование проявяват повишен интерес към средствата и теориите на когнитивната психология. Алън Шьонфелд обобщава този подход така: "Обществото на специалистите по дидактика на математиката не може да си позволи да игнорира психологическите изследвания върху решаване на задачите. Но то не може да ги приеме безрезервно. Дидактиците по математика, мисля, имат своите сърца на правилното място, но откриваме недостиг на методологически

инструменти, които позволяват обширните и задълбочени проучвания на процесите на решаване на задачите.”

Коментарът на Шьонфелд е върху недостатъчния интерес на когнитивните психолози към обучението и инструкциите. Това определено е така, защото в тази област по-ефективно биха работили математици с подходяща психологическа нагласа, особено що се отнася до решаване на задачи от по–високо ниво. Но изследванията в полето на решаване на задачи само биха спечелили от моста между когнитивната психология и математическото образование. Приносът на когнитивните психолози е в разработване на инструментариум за анализиране на процедурите за решаване на задачи, докато специалистите по математическо образование могат да обогатят системите от средства и инструкции за решаване на задачите и учебните програми. Решаването на задачи по математика, особено от тип 3. и тип 4., изискват специални умения при комбинирането на различните процедури, алгоритми и правила, които са съществени в изследванията в областта на математиката. Затова в обучението на бъдещите учители преподаването на психологическите умения се съчетава с конкретните примери на приложение на математическите методи при решаването на задачите.

Как се преподава решаване на задачи

В този пункт ще дискутираме ролята на учителя в най-обобщен смисъл в процеса на инструкции при решаване на задачите и натрупания в това отношение опит. Разполагаме с определено количество изследвания и изводи, но все още не може да се дадат категорични препоръки в това отношение. Често се сблъскваме с констатацията, че не се познава добре ролята на учителя в преподаването на задачи. Главният принцип, който Поя издига е активното учене – да оставим учениците да откриват самостоятелно толкова повече, колкото е достижимо за тях. Неговият възглед се основава на това, че учителят трябва да внуши повече отговорност за тяхното собствено обучение. ”Какво казва учителят в класната стая не е маловажно, но какво учениците мислят е хиляда пъти по-важно”. От една страна, учителят може да привлече учениците чрез задаване на по-близки до съзнанието на учениците задачи, близки до тяхната обкръжаваща среда, при решаването на които се използват диаграми, илюстрации и други нагледни средства, но от друга страна, той води процеса на обучение. Последната добавка е в духа на цитираната по-горе бележка на Поя за свободата до възможни граници. Процесите на преподаване съдържат и елементи на преодоляване на трудности при усвояването на някои процедури и тук е мястото на учителя да потърси форми за това, например да ги убеди да описват някои решения по-подробно, да променят формата на разглежданата задача (за това ще говорим по-късно), да преформулират задачите с цел поставяне на учениците в по-

благоприятна среда, да организира работа в малки групи (работа в екип) и т.н. Учениците възприемат задачата като учебна необходимост. Ролята на учителя е да превърне тази необходимост в интересно предизвикателство. Познаваме голям брой учители като отлични специалисти в своята област, като добри преподаватели на решаването на задачите, но много рядко можем да прочетем нещо за техния опит, а и самите те пишат за това неохотно, нямат опит в описанието на своята дейност. В това отношение по-опитните изследователи теоретици могат да бъдат полезни.

Да се опитаме да очертаем перспективите и състоянието на присъствието на учителя в клас в процеса на решаване на задачи. Първата констатация е липсата на описание на това, което се очаква да се случи в клас, когато се преподава решаване на задачи Това се обяснява с недостатъчното специализирано обучение във висшите училища.

Друга констатация е липсата на подходяща методическа литература, от която учителят да извлече опит и повиши нивото на уменията си в преподаване на решаване на задачи. Много малко е застъпена работата с учителите по отношение на допълнителното обучение по отношение на инструкциите за решаване на задачи. Не съм сигурен обаче, че ако се появи такава възможност, учителят ще има желание да се включи в нея, за да се самоусъвършенства. За решаване на тези проблеми е необходимо изработването и реализирането на подходяща система за специализация и контрол.

Тези констатации фактически обосновават необходимостта от специални курсове във висшите училища, където студентите да се обучават не само в методи за решаване на задачи, но и в методика на преподаване на задачи. Такива курсове трябва да акцентират върху

съдържание, умения и методика. В своето обучение учителят трябва да се запознае с всевъзможните методи и принципи за решаване на задачи. Натрупаният в това отношение положителен опит и знания трябва да обогатят арсенала от средства, които ще го подпомогнат в неговата творческа дейност. Учителят трябва да е посетил "кухнята" на тази дейност.

Учителят в морето от методически изследвания е "загубена душа". Той е използван предимно при статистическите изследвания на изследователите в тяхната експериментална работа, но на него почти не възлагат правенето на изводите, хипотезите и насоките за подобряване на работата, залагане на нови идеи. Да посочим някои от нещата, които се очакват от един учител, който преподава решаване на задачи.

На първо място стои необходимостта учителят да разбере, че съществуват различни видове задачи и че тези задачи могат да се използват за различни цели. Освен това трябва да е наясно, че ако някоя процедура или техника работи при решаването на един клас задачи, тя може да е неприложима при друг. Според целите учителят трябва да определи какви задачи да постави в урока. За неговата дейност няма готови рецепти. Той е творческа личност, която организира процеса във времето и учебниците едва ли допринасят особена полза в това направление. На второ място поставяме необходимостта учителят да осъзнава, че решаването на задачите е комплексна дейност, без да сме в състояние категорично да кажем колко комплексна е тя. Причината за трудностите, които съпътстват учениците при решаване на задачи и които водят до неуспешното им представяне на изпити и състезания, идва от недостатъчното познаване на материята на задачата, т.е. недостатък от организирани

знания по материята на задачата, както и до непознаването на специфичните техники за решаване на задачи от дадения клас. На трето място поставяме пред учителя задачата да създаде подходяща обстановка за решаване на задачи по математика - среда, в която контактът учител – ученици да подпомага усвояването на процесите на обучението. Учениците в повечето случаи приемат поставената задача като учебна и се впускат в решението веднага, като се опитат да направят "нещо", в повечето случаи неуспешно. Обикновено в тяхната представа задачата би трябвало да се реши посредством някакви аритметични действия с данните от условието, защото в повечето случаи те не са имали възможност да търсят решение на истински задачи. Учителят е този, който трябва да превърне задачата в предизвикателство, като я трансформира в термините на учебната ситуация, която е била предварително усвоявана и разширявана в предходните инструкции. Той трябва да координира и коригира поведението на учащите се в процеса на решаване на задачи. В този смисъл може да потвърдим предложението, че в училище не се налага изучаването на решаване на задачи като отделен предмет, но самото обучение по математика трябва да бъде проблемно ориентирано.

Голяма част от специалистите считат, че по отношение на обучението на обещаващите ученици, особено тези, които обявяваме за перспективни, лекциите трябва да се състоят само от методи за решаване на задачи. Обикновено ръководители на тези форми на работа с такива перспективни (използваме за тях още надарени, талантливи, състезатели и др.) ученици са млади преподаватели, идващи направо от университетската скамейка, без особен опит, но с добра университетска подготовка, и те бързо намират за себе си

оптимален план за това какво трябва да се прави в такава форма на обучение. Повлияни от университетските си години, те предпочитат да организират лекционни курсове, в които се решават задачи от тяхна предпочитана област на математиката. За съжаление този начин на действие, който импонира на учителя, води до някои неблагополучия. Изучаването на математиката само чрез слушане на лекции е пасивен метод на обучение. Разликата между него и активното решаване на задачи се променя с възрастта на децата. Следователно учителят трябва да дозира количеството "чист теоретичен материал" и демонстрации на методи с конкретни дейности, в които активната част трябва да са самите ученици. Целите на последните дейности е да повиши стандартите на аргументация, нещо за което ще отделим време по-нататък. С тези мисли ние не отричаме присъствието на елементи на лекционност в работата с перспективните ученици. Нещо повече, при добра възможност, могат да се организират избираеми (елективни) лекционни курсове на определена тематика като например "Полиноми", "Неравенства", "Диофантови уравнения" , "Приложения на комплексните числа в геометрията", "Увод в проективната геометрия", "Комбинаторна геометрия" и др. Някои от тези курсове могат да се изградят на базата на задачи, а други – на чисто теоретична основа. Реализирането на подобни курсове изисква по-голямо усилие от страна на учениците, бих добавил и от страна на инструктора, но те ще допринесат за повишаване на нивото на знанията и от там до по-ефективни умения за решаване на задачи. Добре комбинираните теоретични лекции и подборът на подходящи задачи е средството, което допринася за повишаване на подготовката на тези ученици за успешно решаване на задачи. Проблемно

ориентираният подход изисква повече труд от страна на учителя, но използвайки го, той получава забележим резултат от своята работа.

Поя отдава голямо значение на учителя в обучението на учениците в овладяване на уменията за решаване на задачи. От една страна той препоръчва учителят да насърчава учениците към самостоятелна работа с цел сами да достигнат до откритието, но от друга страна учителят трябва да е личността, която координира и ръководи тази дейност. Поя предлага това да се извършва с помощта на инструкциите, които учителят дава в хода на решаване на задачи, като стимулира процесите с подходящо зададени въпроси и упътвания към обучаваните. При обучението на учениците в решаване на задачи, голяма роля играят учебниците по предмета и сборниците с решени задачи. Важно е учителят да осъзнае, че такива написани материали често допускат несъвършенства и откровени недоглеждания. Затова, препоръката е да се четат текстовете, упътванията и предложените решения критично и да се подлагат на съмнение, в най-добрия смисъл на думата. Ще разгледаме един пример от блестящият сборник “250 задачи по елементарна теория на числата” на изключителният авторитет в тази област поляка Вацлав Серпински.

Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n*, за които числото* $4n^2+1$ *се дели на 5 и на 13.*

Ще започнем с това, че не се търсят всички естествени числа с цитираното свойство, а само да се докаже, че такива има безбройно много. Така текстът създава проблемна ситуация. Затова ще направим едно “нарушение” и ще погледнем в раздела за упътвания и отговори. Ето какво намираме там:

"*Такива са например всички естествени числа n, съставляващи аритметичната прогресия с общ член* $65k+56\left(k=0,1,2,...\right)$. *Наистина, ако* $n=65k+56$, *където* k *е цяло неотрицателно число, то* $n\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,5\right)$ *и* $n\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,13\right)$, *откъдето* $4n^2+1\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,5\right)$ *и* $4n^2+1\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,13\right)$, *т.е. числото* $4n^2+1$ *се дели на* 5 *и на* 13*"*.

Не само упътване, но даже и решение! Остава обаче една загадка – откъде идва идеята на автора да предложи тези числа $n=65k+56$? Да направим малък анализ, който определено трябва да е по силите на учителя, обучаващ учениците в подобна материя. Така, ако поставеният въпрос в задачата се отнася към индивид, който е преминал през курс по Елементарна теория на числата, този въпрос не може да се квалифицира като задача, а това е просто упражнение в съставяне на сравнения от по-висока степен и свеждането им към решаване на системи сравнения от първа степен с едно неизвестно. Наистина, ако $4n^2+1\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,5\right)$ и $4n^2+1\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,13\right)$, то $n^2\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,5\right)$, откъдето $n\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,5\right)$ или $n\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,5\right)$ и $n^2\equiv 3\left(\mathrm{mod}\,13\right)$, откъдето $n\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,13\right)$ и $n\equiv 9\left(\mathrm{mod}\,13\right)$. Според теорията, за да се намерят всички числа със свойството от задачата, трябва да се решат следните четири системи сравнения

$$n\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,5\right) \qquad n\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,5\right) \qquad n\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,5\right) \qquad n\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,5\right)$$

$$n\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,13\right) \quad n\equiv 9\left(\mathrm{mod}\,13\right) \quad n\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,13\right) \quad n\equiv 9\left(\mathrm{mod}\,13\right)$$

Нека решим първата от тези четири системи. Отново прилагаме теорията. От $n=5m+1$ следва сравнението $5m+1\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,13\right)$, откъдето $m\equiv 11\left(\mathrm{mod}\,13\right)$. Така получихме, че $m=13k+11$, откъдето $n=5\left(13k+11\right)+1=65k+56$. Ето откъде идва упътването! Впрочем

като решим останалите три системи, ще намерим всички числа с желаното свойство.

Ако задачата е възложена на по-неопитен ученик, който не владее тази теория, упътването само би му създало известно чувство за малоценност. Но така ли е всъщност? Изискването да съществуват безбройно много естествени числа фактически се редуцира до съществуването на поне едно такова n_0.Тогава всяко число $n = n_0 + 65m$ ще дава числа с исканото свойство. Такова е например числото $n_0 = 56$, което трудно може да се открие от неопитен ученик. Но нека да се върнем към "майсторското" решение. Погледнете към третата колонка. Там без никаква "наука" се вижда, че числата от вида $n \equiv 4 \pmod{65}$ също притежават желаното свойство. Следователно, ако стартираме с $n_0 = 4$ ще имаме безкрайна аритметична прогресия с разлика 65 от естествени числа, елементите на която удовлетворяват условието на задачата. Явно авторът Серпински е подходил "професионално", но в нашия случай доста праволинейно. Можеше ли един критично настроен учител да даде по-полезна инструкция на своите ученици? Например, когато нямаме ясно очертан път към намиране на решението, можем да направим някои числени експерименти. Да се опитаме да пресметнем първите няколко члена на редицата $4n^2 + 1$. Така ще получим последователно 5, 17, 37, 65. Още при $n = 4$ достигаме до число с даденото свойство. Да резюмираме: нуждаем се от само едно (!) число с даденото свойство и с директна проверка, в която се оказва, че първите три стойности са прости числа, достигаме при $n = 4$ до съставно число, а то за наше щастие се дели на 5 и на 13. Иначе, решението на Серпински е абсолютно вярно, но ...

Примери на задачи с некоректни решения или неефективни упътвания в сборниците и учебниците има предостатъчно. Причините за това могат да бъдат чисто технически или по-лошо – логически или несъответстващи на учебните и теоретични принципи. Целта на тази бележка е, че подобни проблеми могат да се появят и при най-големите професионалисти, но последната "инстанция" – учителят е този, който носи отговорността за качеството на обучението. В този смисъл още веднъж да подчертаем голямата отговорност, която носи учителят в изграждането на творческо и критично мислене на учениците си.

Обучение на учителите чрез решаване на задачи

В процеса на подготовката на бъдещите учители обучението в решаване на задачи и методите на преподаване на решаване на задачи заема особено място. Затова още по време на следването си те трябва да получат подходящо за целта образование. Следователно изследванията в областта на решаването на задачи и довеждането на резултатите от тези изследвания до съзнанието на студентите – бъдещи учители е неизменна част от тяхното обучение. От голямо значение е изследователският подход в обучението на учениците и студентите. Този подход се проявява в решаването на всяка задача, при преподаването на всеки елемент от новите знания и затвърдяването на вече изучения материал. Необходимо е учащите се да се потопят в подходяща изследователска среда – в кухнята на математическото изследване. В своята книга “Как се решава задача” Поя систематизира натрупания опит в преподаване на методи за решаване на задачи. Там той акцентира върху това, че учениците трябва да се поставят в положение на “откриватели”, т. е. сами да достигат до съществената част от решението на задачата, като се подпомагат от страна на учителя чрез серия подходящи въпроси, упътвания и даже провокации. Развитието на тези идеи в последно време доведе до сериозно натрупване на полезен изследователски материал, което ни дава основание, че в областта на математическото образование се оформя един пълноценен клон, в който централно място заемат проблемите на решаването на математическите задачи.

През последните 50 години наблюдаваме интересно взаимодействие между тези, които се интересуват от изследванията в

областта на когнитивната наука и тези, които се интересуват от обучението по математика. Изучаването на този клон от математическото образование може само да бъде от полза, защото получените изводи не само прехвърлят мост към когнитивната психология, но и допринасят за по-успешното обучение в решаване на задачи по математика. Ричард Майер (Richard Mayer, Implication of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving) отделя четири по-важни (според него) етапа в обучението в решаване на задачи и в голямата си част, те отговарят на дейностите, които съпътстват обучението.

- *Обучение в превод* – тук се обръща внимание на езиковото разбиране при решаването на задачите. За да покаже, че ученикът разбира задачата, той трябва да в състояние да преведе всяка фраза от условието на задачата на езика на математиката, да предложи едно вътрешно представяне на задачата. По време на обучението на учениците може да се предложи да направят илюстрация, схема или чертеж, да преформулират условието на задачата, да изкажат с други думи твърденията от задачата, да изведат уравнения или съставят числен израз от данните на задачата и др. Изследванията показват, че езиковото разбиране на задачата и липсата на опит в прилагането на съответните дейности среща доста трудности, а за успешното решаване на задачата, определено това играе съществена роля.
- *Обучение в структури* – втората част от обучение се отнася до структурното разбиране. За да се осъзнае

една задача, ученикът трябва да постави елементите на задачата в едно свързано съгласувано цяло. От ученика се изисква да подбере подходящата за решението информация, да търси вече изпробвани схеми на приложения. И тук изследванията показват, че липсата на знания от тази област също водят до негативни резултати.

- *Обучение в стратегии* – тази част от обучение се отнася към въпроса как се решават задачите по математика, т. е. учениците трябва да се обучават в стратегии и методи за решаване на задачи. Желателно е учениците да могат да формулират и осъзнават стратегиите, които използват, да могат да сравняват своите решения с моделните решения, давани от "експерти", да натрупва богат арсенал от стратегии, които да включат в процеса на решаване. Изследванията показват, че изучаването на отделните стратегии обогатява уменията за решаване на задачи.
- *Обучение в алгоритми* – Четвъртата част от обучението се отнася до ролята на алгоритмите при решаването на задачите. Изследванията потвърждават, че при решаване на по-сложно задачи, при използването на по-комплицирани комбинации от стратегии, владеенето на значителен брой по-прости алгоритми трябва да е доведено до пълен автоматизъм. Автоматизирането на определени по-прости алгоритми са извършва на базата на упражненията. Уменията за рутинни преобразования,

за решаване на стандартни уравнения трябва да подпомогнат правилната преценка за вярност на постигнатите факти, да откриват евентуално допуснатите технически или логически грешки.

Подробни коментари на тези четири етапи в обучението в решаване на задачи явно или неявно присъстват в литературата по тези въпроси и прилагането им си струва да бъде обсъждано по-подробно в процеса на подготовката на бъдещите учители. Осъзнаването важността на тези етапи в обучението определено ще изясни механизмите на решаването на задачите по математика и съответното преподаване. Да отбележим само, че тази класификация на етапите на обучение не препоръчва инструкциите да се извършват поотделно и несвързано. Напротив, процесът на обучение трябва да е цялостен и отделните елементи трябва да проникват един в друг с цел прилагане на изследователския подход в обучението.

Да разгледаме следната задача.

Съществуват ли цели числа k, x, y, z, t, *такива че*

$$k^2 + x^2 = (k+1)^2 + y^2 = (k+2)^2 + z^2 = (k+3)^2 + t^2 ?$$

При решаване на задачи за съществуване имаме два възможни отговора. При отрицателен отговор трябва да се направи доказателство, а при положителен отговор се очаква само да се посочи потвърждаващ пример. Понеже не знаем какъв ще е отговорът на тази задача ще приложим идеята да приемем, че съществуват числа с дадените в условието свойства и ще се опитаме за анализираме каква следва от това приемане.

От дадените равенства следва, че $k^2 + x^2 + (k+2)^2 + z^2 = 2.\left((k+1)^2 + y^2\right)$ и след опростяване получаваме $x^2 + z^2 + 2 = 2y^2$.

Последното показва, че числата x и z са едновременно четни или нечетни. Да приемем, че тези числа са нечетни. Сега ще приложим едно важно и много популярно свойство на числата, което ще коментираме по-нататък, а именно: квадратът на всяко нечетно число дава остатък 1 при деление с 8. Следователно $x^2 \equiv z^2 \equiv 1(\bmod 8)$. Като приложим този факт към горното равенство, ще получим $x^2 + z^2 + 2 \equiv 2y^2(\bmod 8)$ или $1+1+2 \equiv 2y^2(\bmod 8)$, откъдето $y^2 \equiv 2(\bmod 4)$. Последното е невъзможно, защото от една страна числото y трябва да е четно, а от друга страна квадратът му трябва да не се дели на 4. Следователно числата x и z трябва да са четни. Да отбележим, че фактически ние приложихме стратегията на допускане на противното, а след това – стратегията на разглеждане на случаи, а пък успоредно с това и стратегията за прилагане на свойствата на числата. Остана да разгледаме случая, при който числата x и z са четни. Тогава y трябва да е нечетно. Сега ще приложим идеята за решаване на подобна задача, т.е. решението до сега. От равенството $(k+1)^2 + y^2 + (k+3)^2 + t^2 = 2.\left((k+2)^2 + y^2\right)$ след опростяване ще достигнем до равенството $y^2 + t^2 + 2 = 2z^2$. Но това е полученото в решението на задачата в нейната първа фаза. Следователно можем да заключим, че y и t са четни, а z е нечетно. Изводите в решението на двете части си противоречат. Следователно не съществуват цели числа k, x, y, z, t с желаните свойства.

След като решим някоя задача работата около нея не трябва да се прекъсва. Полученото решения, както и получения резултат не може да не създаде проблемна ситуация към която могат да са поставят интересни въпроси. Още повече, че току-що решената

задача беше задача за съществуване при дадени условия, естествено е да поставен въпроса за съществуване на числа с дадените свойства, но с по-малък брой, а именно:

Съществуват ли цели числа k, x, y, z*, такива че*

$$k^2 + x^2 = (k+1)^2 + y^2 = (k+2)^2 + z^2 ?$$

Това е пример за въпрос за съществуване с утвърдителен отговор, което означава, че е достатъчно да посочим поне един утвърждаващ пример. На всички е известен т. н. египетски триъгълник – този със страни 3, 4, и 5. Равенството $3^2 + 4^2 = 5^2$ за целите на нашата задача може да се интерпретира по следния начин $3^2 + 4^2 = 4^2 + 3^3 = 5^2 + 0^2$. Тези равенства дават пример за положителния отговор на задачата.

Веднага обаче може да възникне нов въпрос:

Краен или безкраен е броят четворките цели числа k, x, y, z , за които $k^2 + x^2 = (k+1)^2 + y^2 = (k+2)^2 + z^2$?

Отново сме пред въпрос за съществуване. Съществуването на поне една четворка цели числа с разглежданите свойства е налице, но дали такива четворки са краен или безкраен брой – ние не знаем. Даже не знаем нищо за съществуване на поне още една такава четворка. Идеята, която ще следваме е в търсене на нови примери, които да удовлетворяват условието, след което ще продължим да търсим отговора на въпроса за съществуване на краен или безкраен брой решение на задачата. И така, нека числата k, x, y, z удовлетворяват условието на задачата. От първата задача знаем, че x и z са четни, т.е. $x = 2u$ и $z = 2v$. Тогава от равенството $k^2 + x^2 = (k+2)^2 + z^2$

получаваме, че $k = u^2 - v^2 - 1$. От равенството $k^2 + x^2 = (k+1)^2 + y^2$ следва, че $y^2 = 2u^2 + 2v^2 + 1 =$

$(u+v)^2 + (u-v)^2 + 1$. Като преминем към сравнение по модул 8, ще установим, че $u^2 + v^2$ се дели на 4, а това е възможно само ако u и v са четни. Полагаме например $u - v = 2n$ и $u + v = 2n^2$, където n е произволно цяло число. Така получаваме $k = 2n.2n^2 - 1 = 4n^3 - 1$, $x = 2n^2 + 2n$, $y = 2n^2 + 1$ и $z = 4n^3 - 1$. Следователно равенствата

$(4n^3 - 1)^2 + (2n^2 - 2n)^2 = (4n^3)^2 + (2n^2 + 1)^2 = (4n^3 + 1)^2 + (2n^2 - 2n)^2$ са тъждества. Ясно е, че за всяко цяло n ще имаме по едно решение на задачата. Всички решения ще се получат от полагането $u = m + n$ и $v = m - n$. Следователно съществуват безбройно много четворки цели числа с разглежданите свойства.

Чрез изследването на проблемната ситуация, зададена в тази задача, демонстрирахме различните подходи при обучението на ученици и студенти в овладяването и усъвършенстването на решаването на задачи. Да обърнем внимание на различните нива на приложение на стратегиите и инструментите при решаване на задачи. Разнообразието от такива форми обогатява обучаемите и им предоставя възможност за избор.

Отново да се обърнем към определението за задача. В него неясно се долавя идеята за нещо загадъчно, предизвикателно, трудно достижимо, т.е. предизвикващо интерес. Именно този интерес трябва да се запази при обучението на учениците, както и на бъдещите учители. Това може да се осъществи чрез подходящ избор на задачи за демонстрация и за самостоятелна работа. В това отношение освен упражненията върху определени ситуации, при които трябва да се

овладеят необходимите алгоритми за приложенията, трябва да се включат в обучението и задачи за доказателство за съществуване на обекти с определени интересни свойства, задачи с необичайни отговори, задачи – казуси.

Моделът на Поя. Четвъртата фаза

През 1993 г. Джон Дюи (Dewye) в труда си "Как да мислим" (How to think) представа една идея за решаването на задачи, същността на която е използване на план на дейностите. Той предлага модел за решаване на задачи изобщо, не непременно математически, като задачи от бизнеса, икономиката, индустрията и др. Моделът на Дюи може да се опише в четири, пет или шест фази в зависимост от това на какво се отделя специфично внимание. Ще приведем варианта на модел на Дюи в шест стъпки.

1. Разбиране или ориентация в целите – идентификация на проблемната ситуация.
2. Определяне на задачата.
3. Съставяне на план.
4. Изпълняване на плана.
5. Преминаване през последствията.
6. Оценяване: поглед назад, за да се определи дали резултатът удовлетворява първоначалните условия, поглед напред към обобщения както на методите, така и на резултатите.

Този модел е резултат на наблюденията върху дейностите, съпътстващи решаването на задачата. Първите две стъпки са много близки и те са свързани с преход от езика на задачата към езика на математическите изрази, т.е. за математическите задачи това означава разбирането им като такива. През 1945 г. концепцията да се използва подобен модел е развита от Поя в книгата "Как се решава

задача” (How to Solve it”). Неговият модел е концентриран върху решаването на задачи от математиката и адаптира модела на Дюи за тази цел. Моделът на Поя се задава в четири стъпки.

1. Разбиране на задачата.
2. Създаване на план.
3. Изпълнение на плана.
4. Поглед назад. Оценяване на извършените процеси.

Така представеният модел е доста по-ясен и изчистен. В него за всяка стъпка са предвидени определено количество въпроси, които по същество са инструкции към решаващия задачата. Първата фаза “Разбиране на задачата”, която по-точно би трябвало да се схваща като разбиране на условието на задачата, изисква разпознаване на тип на задачата, от каква област е, до колко решаващият се е срещал с подобни задачи, какво е дадено, каква е целта, достатъчна ли е дадената информация. Въобще това е фазата на ориентацията. Да разгледаме един пример.

Да се докаже, че произведението на четири последователни естествени числа не може да е точен квадрат на цяло число.

За да се ориентираме в условието на задачата, трябва да разберем същността на въпроса. Обикновено задачите делим на два вида – такива, в които се иска нещо да се намери и такива, в които се иска нещо да се докаже. Поя отбелязва, че задачите, в които се иска нещо да се доказва са от областта на така наречената “Висша математика”, а задачите за намиране се отнасят към елементарната математика. Това външно разделяне господстваше през средата на миналия век и сборниците със задачи се деляха на задачи за изчисление (вероятно това са били задачите за намиране или по-скоро упражнения за прилагане на теоретичния материал) и задачи за

доказателство. Понастоящем се счита, че задачите, условията на които започват с “Да се намери...”, са определено най-сложните за решаване, защото те не само изискват откриване на отговора на въпроса на задачата, но и аргументация, че намереното и само то е решение на задачата. Следователно, задачите за намиране са задачи за доказателство, но в утежнен вариант – не е зададено явно това, което трябва да се докаже. По-нататък чрез подходящи примери ще доизясним тези постановки. Да се върнем сега към задачата, която решаваме. Отделяме двете състояния н задачата – “даденото” – *Дадени са произволни четири последователни естествени числа*. За удобство ги означаваме с $n, n+1, n+2, n+3$, и заключението (т.е. целта) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ *не може да е точен квадрат.* Формулирането на даденото и целта не винаги е проста работа, защото в тази фаза трябва да въведем символите, които се пресмятат. Понякога правилното въвеждане на означенията е съществено. По-важно е тук да обърнем внимание на заключението. Как да достигнем до факта, че нещо не е точен квадрат? Това означава, че произведението е нещо друго, различно от точен квадрат. Но какво е това нещо? Ако разчитаме само на въображението си, няма как лесно да се натъкнем на такъв факт. Не се вижда ясен признак, по който да определим дали разглежданото произведение е точен квадрат или не е такова. Така постепенно преминаваме към втората фаза “Създаване на план”. Този план се състои в това да се разгледат частни случаи. Това може да просветли представата ни за задачата, да се ориентираме по-добре. Пресмятаме $n(n+1)(n+2)(n+3)$ за $n=1,2,3,4$. Получаваме съответно 24, 120,360, 840, 1680. Проверяваме, че тези числа наистина не са точни квадрати, но понеже в задачата се

обсъждат именно квадратите на числата, ние ще потърсим кои са най-близките до получените произведения точни квадрати. Най-удобно би било използването на таблица за точните квадрати. Една бърз проверка, пак например в таблиците, показва, че $24 = 5^2 - 1, 120 = 11^2 - 1$, $360 = 19^2 - 1, 1680 = 41^2 - 1$. Тези наблюдения показват, че причината разглежданите произведения не са точни квадрати може да е в това, че те са с 1 по-малки от някои точни квадрати, следователно самите те не са точни квадрати, защото редицата от точните квадрати 1, 4, 9, 16, 25, ... не съдържа последователни числа. Възниква хипотезата, че произведенията на четири последователни числа винаги е число, по-малко с единица от някой точен квадрат. Ние искаме да докажем това, защото хипотезата изглежда правдоподобна от едни страна, а от друга – задачата се решава. Сега се нуждаем от помощ да разберем за какви квадрати става дума. Понеже искаме да установим, че $n(n+1)(n+2)(n+3)$ е с 1 по-малко от точен квадрат, трябва да докажем, че $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ е точен квадрат. Как да покажем, че последният алгебричен израз винаги приема стойност точен квадрат за цели стойности на n? Съществуват много подходи за постигането на тази цел. Една възможност, която по-нататък често ще коментираме, е разлагането на израза на множители с крайна цел постигане на точен квадрат.

Така достигаме до третата фаза на модела на Поя “Изпълнение на плана”. Сега групираме елементите на израза с желанието те да са “почти” равни. Забелязваме, че произведението на n с $n+3$ е почти като произведението на $n+1$ с $n+2$ в смисъл, че те се различават

само по свободните си членове. Така $n(n+3)=n^2+3n$ и $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$. Тогава

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$

$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2.$$

По такъв начин доказахме твърдението на задачата. Сега пристъпваме към четвъртата фаза "Поглед назад". Ще резюмираме направеното до тук. Първо прочетохме условието на задачата с цел ориентация, след това продължихме с малко "черна" работа (числен експеримент и наблюдение), която ни доведе до правдоподобна работна хипотеза. Последва доказателство на тази хипотеза като основното беше прилагане на алгебрична техника и съображения за равно отдалечените членове в произведението. Главната трудност, която преодоляхме беше изпълнението на плана, където извършихме преобразование на израза до точен квадрат. В това преобразование би могло да се вкарат някои "подобрения". Например за по-ясно обяснение можеше да се направи субституцията $n^2+3n=m$ и тогава изразът ще се редуцира до $m(m+2)+1$, който по-лесно се свежда до точния квадрат $(m+1)^2$. Друга възможност за доказване, че разглежданият израз е точен квадрат, е да разкрием тотално всички скоби (да не повярваш, че се предлага)

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$.

Тъй като последният израз трябва да е точен квадрат на (сигурно) квадратен тричлен от вида n^2+an+1 или n^2+an-1, опитваме с първия възможен случай и получаваме след приравняване на коефициентите, че $a=3$, т.е. $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$.

Друга възможност за доказателство е прилагането на математическа индукция.

По време на решаване на задачата непрекъснато извършвахме контрол на етапите на решаване. Пред нас винаги трябва да стоят първоначалното и целевото състояние на задачата. Целта ни ориентира за възможните изходи. Всякакви хаотични дейности биха ни извадили от "трасето" – търсенето трябва да е целенасочено.

Използването на четири стъпковия модел на Поя за решаване на задачите е претърпял множество модификации. Независимо от това, той трасира основните дейности при решаването на задачите. Експертите по Problem Solving винаги се съобразяват с него в почти неявен вид. Неопитните ученици, а не само те, често подценяват някоя от фазите, което води до определени неблагополучия. Най-често се подценява, дори пренебрегва, четвъртата фаза. Обикновено се счита, че щом изпълнението на решението е завършено, не се налага повече внимание към задачата. Какво осигурява четвъртата фаза? Най-напред убеждението, че задачата е решена правилно. След това е добре да се потърси по-леко или по-елегантно или даже по-ефектно решение. Не винаги първата идея носи най-доброто решение. Трябва да се отговори на въпроса какви обобщения могат да се направят в областта на задачата и в кои направления. Тази дейност често води до съставянето на нови задачи. Търсене на възможности за приложение на метода за решаване на задачата в близки ситуации. От голямо значение е осъзнаването на това с какво се е обогатил решаващият, какво ново е научил от работата по решаване на задачата и т.н. Ще приведа пример от личната си практика, когато се занимавах с подготовката на националния отбор за участие в международните олимпиади.

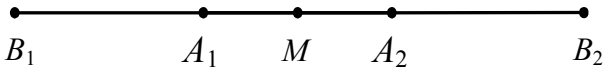
Всяка точка в равнината е оцветена в един от един от два цвята – син или червен. Да се докаже, че съществуват четири еднакво оцветени точки, никои три от които ни лежат на една права, такива че едната от тях е медицентър на триъгълника с върхове останалите три.

Това е задача за доказателство за съществуване на обект с определено свойство. Достатъчно е да посочим поне един такъв. Планът, който ще следваме се основава на факта, че един предмет не може да притежава две взаимно изключващи се свойства – една идея, която ще развием по-нататък. В нашия случай ще се окаже, че една точка трябва да е оцветена и в червено, и в синьо.

За да се ориентираме по-добре ще се опитаме да разгледаме случая, при който точките са разположени на една права. Сега задачата би изглеждала така:

Всяка точка върху правата в един от един от два цвята – син или червен. Да се докаже, че съществуват три еднакво оцветени точки, такива че едната от тях е среда на отсечката с краища останалите две.

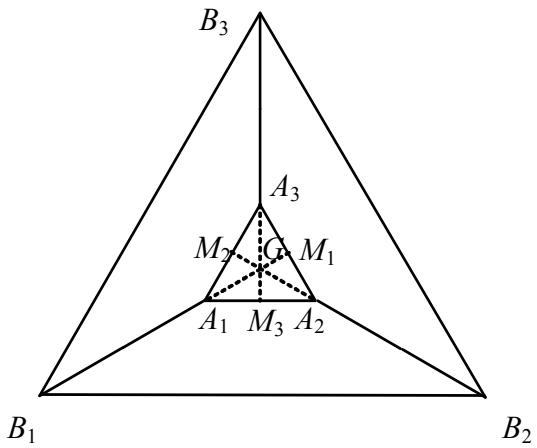
Тази формулировка идва от факта, че естественият аналог върху правата на медицентър на триъгълник трябва да е среда на отсечка. Нека сега вземем една отсечка, краищата на която са



еднакво оцетени. Това винаги е възможно, защото точките върху правата са безбройно много. Нека това са точките A_1 и A_2, за които за определеност приемаме, че са червени. Ако средата M на тази отсечка е червена точка, то задачата е решена. Приемаме, че точката M е синя. Сега разглеждаме точките B_1 и B_2 върху правата, такива

че $B_1A_1 = A_1A_2 = A_2B_2$, такива че нито една от точките B_1 и B_2 не съвпада с някоя от точките A_1 и A_2. Ако някоя от точките B_1 и B_2 е червена, да кажем B_1, трите точки B_1, A_1, A_2 решават задачата. Нека приемем, че и двете точки B_1 и B_2 са сини. Но тогава точката M ще е среда на отсечката B_1B_2 и тази комбинация от точки удовлетворява условието на задачата.

Да се върнем към първоначалната задача, като се опитаме да обобщим подхода от аналогичната задача за правата. Понеже точките в равнината са безбройно много, винаги можем да изберем три еднакво оцветени, които са върхове на неизроден триъгълник. Нека за определеност да означим тези точки с A_1, A_2, A_3 и да приемем, че те са червени. Нека G е медицентърът на този триъгълник. Ако точката G е също червена, задачата е решена. Приемаме, че точката G е синя. От начина, по който решихме задачата върху правата, се вижда, че трябва да потърсим три нови точки B_1, B_2, B_3,



които са върхове на неизроден триъгълник, медицентърът на който съвпада с G. Да припомним, че медицентърът на триъгълника $A_1A_2A_3$ е общата точка G на трите медиани A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 (тук M_1, M_2, M_3 са съответно средите на страните на триъгълника и точката G дели всяка от медианите в отношение 2: 1). Необходимо и достатъчно условие една точка M да е медицентър на триъгълника $A_1A_2A_3$ е векторното равенство $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} = \vec{0}$. Въвеждаме точките

$B_1, B_{2,} B_3$ като следваме идеята от задачата върху правата по следния начин: $\overrightarrow{B_1A_1} = 2.\overrightarrow{A_1M_1}$, $\overrightarrow{B_2A_2} = 2.\overrightarrow{A_2M_2}$ и $\overrightarrow{B_3A_3} = 2.\overrightarrow{A_3M_3}$. От тези векторни равенства следва, че точките A_1, A_2, A_3 са съответно медицентрове на триъгълниците $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$ и $B_3A_1A_2$. Сега разсъждаваме аналогично, ако поне една от точките B_1, B_2, B_3 е червена ще имаме триъгълник с еднакво оцветени върхове и медицентър в същия цвят. Ако приемем, че и трите точки $B_1, B_{2,} B_3$ са сини, то триъгълникът $B_1B_2B_3$ заедно с точката M, която е негов медицентър, защото

$$\overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GB_2} + \overrightarrow{GB_3} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{A_3B_3} = \frac{8}{3}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3}\right) = \vec{0}.$$

Сега като погледнем назад, разбираме каква важна роля е изиграла идеята да стартираме от аналогичния случай на задачата върху правата, който ни помогна да построим (открием) точките B_1, B_2, B_3, както и прилагането на векторната характеризация на медицентъра, наричан още център на тежестта на триъгълника. Тези съображения ни водят до формулирането на нова задача – обобщение на ситуацията в тримерното пространство. Сега аналог на триъгълник ще е тетраедър, т.е. многостен с четири върха, които не лежат в една равнина, а ролята на медицентъра се поема от центърът на тежестта на тетраедъра. Това е общата точка на отсечките свързващи върховете на тетраедъра с медицентровете на срещулежащите страни. За тази точка имаме аналогична векторна характеристика. Тези аналогични ситуации провокират създаването но следната задача.

Всяка точка от пространството е оцветена в един от два цвята – червен или син. Да се докаже, че съществуват пет

еднакво оцветени точки, никои четири от които не лежат в една равнина, такива че едната от тях е център на тежестта на тетраедъра с върхове останалите четири.

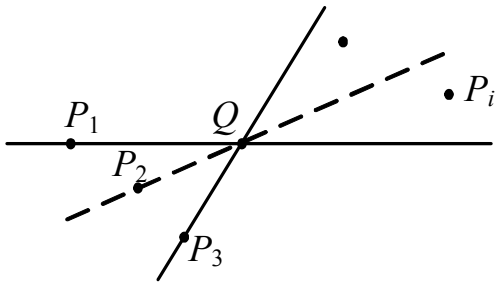
Решението на поставената задача провеждаме по аналогия. Ще направим още един коментар. Задачата в равнината, както и тази в пространството, може да се реши и без използване на вектори. Например може да се разгледа хомотетия с център – центъра на тежестта на триъгълника или съответно на тетраедъра.

Чрез фазата "Поглед назад" съставихме нова задача, макар и обобщението да беше доста "праволинейно" – просто пряка аналогия от равнината към пространството. Понякога обаче пряката аналогия във формулировката не води до пряка аналогия в решението.

Да проследим още един пример.

Нека $P_1, P_2, ..., P_n \left(n \geq 3\right)$ *и* Q *са точки от равнината, като никои три от тях не лежат на една права. Дадено е, че за всеки две точки* P_i *и* P_j *може да се намери точка* P_k*, такава че точката* Q *е вътрешна за триъгълника* $P_iP_jP_k$*. Да се докаже, че числото* n *е нечетно.*

Можем да отнесем тази задача към областта на комбинаторната геометрия. Заключението обаче не звучи нито комбинаторно, нито геометрично, а е по-скоро аритметично. Тук е мястото отново да характеризираме задачата като загадъчна, с неочакван изход, с неясна насоченост при търсене на подход. Тази задача е такава. В комбинаториката често



използваме понятията изображение и съответствие. За тази цел

разделяме равнината на две полуравнини с помощта на правата QP_1. Върху тази права няма други точки от разглежданите, т.е. част от останалите точки условно можем да считаме, че са в горната полуравнина а останалата – в долната. Сега въртим лъча $\overrightarrow{QP_1}$ около точката Q в едно от двете посоки, например да описва долната полуравнина. Нека първата точка, през която минава лъчът, да е P_2. Според условието на задачата следва, че има точка P_i, такава че точката Q е вътрешна за триъгълника $P_1P_2P_i$, което показва, че точката P_i лежи в допълнителния ъгъл на $\sphericalangle P_1QP_2$ и тази точка е в горната полуравнина. Като продължаваме да въртим лъча ще стигнем до нова точка, да кажем P_3 и аналогично ще намерим точка в горната полуравнина, по–точно в допълнителния на $\sphericalangle P_2QP_3$. Продължаваме въртенето на лъча до достигането му в противоположно положение. По такъв начин на всяка точка от долната полуравнина съпоставяме поне по една от горната (възможно е и повече от една), което показва, че броят на точките от долната полуравнина не надвишава броя на точките в горната. Но тази процедура може да се проведе с лъча като го въртим в горната полуравнина. Тогава ще получим, че броят на точките от горната полуравнина не надвишава броя на точките от долната. Следователно колкото точки има в горната равнина толкова има и в долната. Общият им брой е четно число и като добавим точката P_1 ще получим, че числото n е нечетно.

От предишния пример се убедихме, че формулиране на аналогична задача в пространството води до нова задача. Да формулираме тази задача.

Нека $P_1, P_2, ..., P_n \ (n \geq 4)$ *и* Q *са точки от пространството като никои четири от тях не лежат в една равнина. Дадено е, че за всеки три точки* P_i, P_j *и* P_k *може да се намери точка* P_l, *такава че точката* Q *е вътрешна за тетраедъра* $P_iP_jP_kP_l$ *Да се докаже, че числото* n *е четно.*

При решаването на предната аналогична на задача от равнината задача в пространството се изискваше само "козметична" намеса. В този случай също, макар и не толкова формално, можем да получим търсения резултат. Просто с помощта на точките Q, P_1 и P_2 ще разделим пространството на две полупространства и ще установим с подобна процедура на въртене, че точките в едното полупространство са толкова, колкото са и точките в другото.

На пръв поглед всички предписания за решаване на задачата са спазени. Четирите фази са осъществени. Достигнато е до обобщение. Но дали сме изчерпали всички възможности, които може да ни даде ситуацията? Има един въпрос, който убягна от нашето изследване. Ние решавахме задачата при условие, че *съществува* такава конфигурация от точки равнината. Ако такава конфигурация не съществува, значи пространството на ситуациите на задачата е празно, т.е. работили сме в празното пространство. За наше щастие, това не е така и лесно можем да съобразим, че за всяко нечетно число n съществува конфигурация, която реализира условието. Това е множеството от върховете на правилен n-ъгълник $P_1P_2...P_n$ и неговият център Q, което е модел на ситуацията на задачата. Как обаче ще развием тази идея в пространството? Тук аналог на правилните многоъгълници са петте правилни многостени, така наречените Платонови тела. За това ще се върнем обратно към

ситуацията в пространството. Без ограничение на общността може да се приеме, че точките $P_1, P_2, ..., P_n$ лежат на сфера с радиус Q. За тази цел взимаме произволна сфера с център Q и заместваме дадените точки с пресечните точки на сферата с лъчите с начало Q и посоката към дадените точки. Върху сферата извършваме процеса на "триангулация", т.е. очертаваме върху нея триъгълни парчета. Лесно се вижда, например по индукция, че тези триъгълни парчета са на брой $2n-4$. Сега прилагаме даденото свойство в задачата. На всяко триъгълно парче ще съпоставим точка, която с върховете на триъгълника ще образува тетраедър, в който се намира точката Q. Тази точка е в допълнителния тристенен ъгъл на тристенния ъгъл с връх точката Q и лъчите с начало Q и определени от върховете на триъгълника. Следователно на два различни триъгълника се съпоставят различни върхове, т.е. налице е неравенството $2n-4 \le n$, откъдето следва, че $n \le 4$, а тъй като задачата има смисъл при $n \ge 4$, остава единствено $n = 4$. Видяхме, че при едно правилно прилагане на модела на Поя не само, че можем да стигнем до решаването на една наистина любопитна интригуваща задача, но и да достигнем до откриване на нови интересни ситуации. Във варианта: "Да се докаже, че $n = 4$", задачата се появи в няколко специализирани за задачи списания и към нея беше проявен особен интерес. Разбира се, сега могат да се формулират и други по-екзотични задачи като " Да се докаже, че не съществуват точки $P_1, P_2, ..., P_6$ и Q, никои четири от които не лежат в една равнина, така че да е в сила условието на задачата" и др. подобни.

Втората фаза от модела на Поя.
Евристични стратегии

В предишния пункт се запознахме с модела на Поя и обърнахме внимание на четвъртата му фаза "Поглед назад", която много често се пропуска, особено от неопитните решавачи на задачи. Ясно е, че без да разбираме условието на задачата (първата фаза) и без да преминем през различните етапи на самото решаване (третата фаза), усилията ни ще са изложени на провал. Този провал много често може да е резултат от неглижирането на втората фаза от модела на Поя – "Съставяне на план".

Казахме, че от голямо значение е изучаването на придобитото от опитен специалист изкуство за решаването на задачи. Какво се случва с начинаещия решавач: той не може да се ориентира как да стартира решението, опитва се да направи няколко начални, често хаотични стъпки, но не може да продължи по-нататък и се отказва. В противовес на това експертът по решаване на задачи не изпада в паника, има увереност във възможностите си и организира изследването на задачата, като прилага различни средства, с които да стартира решението. Това може и да не е гаранция, че задачата ще бъде решена, но определено някакъв прогрес ще бъде постигнат. Така могат да бъдат привлечени някои по-специфични техники и по този начин движението към успешното решаване на задачата ще продължи. Прието е, че опитните специалисти в решаване на задачи оперират на три равнища (нива):

Стратегии – това са математически или психологически идеи за стартиране и изследване на задачите.

Тактики – това са разнообразни математически методи и теории, които намират приложения в различни ситуации.

Инструменти – това са тясно фокусирани математически техники и похвати, които се прилагат в специфични ситуации.

И тук, както и при другите подобни класификации, не може да се постави рязко разделителна линия между отделните нива.Математиката е наука със строги формулировки, символи, методи на аргументация. Решаването на задачи не е клон от математиката и затова ползването на термини като стратегии, тактики и инструменти служат само да очертаят различните нива на решаването на задачите. Даже и да няма строги дефиниции на тези нива, ние се стараем да разбираме смисъла на това, което те означават. Например стратегията се дефинира и като изкусно средство за постигане на целта.

Развитието на методите на преподаване на задачи в последния половин век и натрупваният опит в методиката на преподаване на задачи, дават възможност този научно – изследователски материал да се обособи като самостоятелна теория в науката за преподаване. Досега, за да обозначим тази наука използвахме термините решаване на задачи и се опитахме да конкретизираме нещо по-точно чрез Problem Solving. Става дума за една интердисциплинарна наука. Тя черпи идеи от математиката, психологията и изкуствения интелект. Тази сравнително нова млада наука все по-често напоследък се идентифицира с названието *евристика*. Думата идва от гръцки и означава *намиране*, *откриване*. За първи път думата евристика срещаме в работите на Пап (Папос) от Александрия. Самият Пап обявява за свои предшественици Евклид, Аполоний и Аристотел, но ние приемаме него като

основоположник на евристиката. Поя обяснява евристиката по следния начин.

> "... Евристиката е названието на една не съвсем ясно очертана област на изследване, принадлежаща на логиката, философията или психологията. Тя се характеризира често само с общи черти, а рядко в подробности, и днес е почти забравена. Целта на евристиката е да изучава методите и правила за изследване и откриване. ...":
>
> "... Съвременната евристика се стреми да разбере процесите при решаване на задачите и по-специално мисловните процеси, които като правило се използват. Тя има различни източници на информация, никой от които не трябва да се пренебрегва. Едно сериозно изучаване на евристиката трябва да отчита като логическия, така и психологическия фон... Опитът, получен от наблюдаването на хора, които решават задачи, трябва да бъде основата, върху която да се изгражда евристиката... Изучаването на евристиката има "практически" цели – едно по-добро разбиране на мисловните операции, които често се използват при решаване на задачите, би могло да окаже известно благоприятно влияние върху преподаването на математиката."

Следвайки препоръките на Поя да наблюдаваме дейностите на различните участници в процесите на решаване на задачите, стигаме до извода, че по-опитните от тях поддържат приблизително сходно поведение. Те обмислят предварително ситуацията, не се впускат веднага в разни несвързани изчисления, опитват различни подходи за стартиране, стремят се да аргументират логически всяка своя стъпка, свързват следващата стъпка с предходната и така достигат до

определен напредък в решаването на задачата. Целият този арсенал от дейности разглеждаме като евристични техники. Самата евристика не решава задачата, но с нейна помощ можем да достигнем до решение. Прилагането на евристичните техники е препоръчително, особено ако не е известен пътя към решението. Може да се твърди в този случай, че евристичните техники са единственият път към решаването на задачата. Затова обучението в евристично мислене, запознаването на учениците с различни евристични подходи, съществено дава добри резултати. Такова обучение е напълно възможно и може да е изключително ефективно. То е полезно и за самия преподавател. Преподавайки "евристично", преподавателят обогатява своята представа за областта, която преподава, разбира по-добре вътрешните взаимодействия на обектите в нея и не е случайна максимата, че ако искаш да осъзнаеш някаква непозната материя, най-добре е да започнеш да я преподаваш. При обучението на неопитните ученици и студенти, често прибягваме до демонстрации на образци на решения. Последните са в повечето случаи изящни и са дадени от съответните експерти, но не винаги тези решения достигат до съзнанието на учащите се. Даже обратното, някои считат, че такъв вид разсъждения, които им се демонстрират, са непостижими за техните възможности и се постига негативен резултат от такова обучение. При това положение е напълно нормално, да се предложат на учениците съответните евристични техники, които са открили "скрития път" към решението, което още веднъж показва, че решенията на голяма част от еталонните решени задачи трябва да се преосмислят и напишат наново – на езика на евристиката. Запознавайки се по-детайлно с кухнята на мисленето, учениците

осъзнават тези еталони и вече могат да опитат да прилагат техниките самостоятелно при решаване на подобни задачи. Тук от определено значение е следния казус: Укриват ли преподавателите и най-вече експертите в решаване на задачи тези евристични техники, както се укриват търговските и промишлените тайни в индустрията? Вероятно някои го правят. И това е разбираемо, защото именно чрез евристичните техники се проявява мощта не само за решаване на задачи, но и мощта на истинското творчество, където се постигат новите открития, а носителят им изгражда своята репутация. Все пак разкриването на действията на отделните евристични практики и поставянето им в центъра на обучението създава истинския учител.

Същността на втората фаза на модел на Поя се състои в избора на евристична стратегия. Нека уточним, че задачите, към които ще отнасяме по-нататък модела на Поя ще бъдат общо взето много стъпкови. Това означава, че след прилагането на една стратегия, задачата, която се решава се преобразува в нова задача, защото се е променила ситуацията и към новата задача отново ще се прилага модела на Поя. В съществуващата литература се разглежда предимно задачи, които могат да се решат с помощта на една стратегия. От учебна гледна точка тези примери илюстрират приложението на съответните стратегии, но интересните задачи изискват комбиниране на стратегии, тактики и инструменти. Това ще се опитаме да демонстрираме чрез подходящи примери. Създаване на план за решаване на задачата е фактически създаване на комбинация от стратегии. Не винаги третата фаза “Изпълнение на плана” може да приключи в хода на решаване на задачата, след което да пристъпим към четвъртата. Понякога, според получени резултати, наблюдения, експерименти в хода на решаване на задачата , може да се наложи да

се върнем към фаза “Уточняване на план”, след което да пристъпим към фазата ”Изпълнение на уточнения план” и т.н.

В литературата по решаване на задачи виждаме различни трактовки за това какво е евристична стратегия. В резултат на тези трактовки срещаме различни списъци от примерни евристични стратегии. Едва ли бихме могли да дадем пълно описание на всички такива списъци. Според авторите на подобни описания, дали са дидактици в областта на математиката, дали са психолози или проявяваш друг вид интерес към решаването на задачите, подобни списъци ще изглеждат доста различно и акцентите при съставянето им силно ще рефлектират върху качествените характеристики на тези списъци. Някои автори приемат всички препоръки за успешно решаване на задачи, като “Разберете условието на задачата” , “Не се плашете от това, което трябва да преодолеете”, “Водете си записки”, “Проверявайте отговорите си” и др., за евристични стратегии. Австралийският психолог Джон Малууф публикува класификация на стратегии за решаване на задачи (в най-общ смисъл) по типове: стратегии за подпомагане разбирането на задачата, за подпомагане опростяването на целите, за подпомагане определянето на сърцевината на задачата, за включване на приложение на външна помощ за подпомагане разбирането на задачата, за включване на приложение на логика за подпомагане на определянето на възможно решение, за използване на възможно решение като отправна точка към решаването на задачата,за разбиране дали намереното решение е най-добро, за подпомагане оптимален режим по време на решаване на задачи и др. подобни. В тази публикация, озаглавена “Петдесет обяснени стратегии за решаване на задачи” можем да намерим полезни съвети към тези, които решават задачи, голяма част от които

се основават на здравия разум, като “Визуализирайте проблема”, “Преформулирайте задачата”, “Потърсете помощ”, “Използвайте математика”, “Използвайте дедуктивна аргументация”, “Използвайте метода на пробите и грешките” и др. Към всяка от тези стратегии, които са основани на здравия смисъл, които са общо приети препоръки, ще добавим някои по-специфични стратегии за решаване на задачи по математика, свързани със същността на самата наука или области от нея. Ще конкретизираме стратегиите, които ще прилагаме към решаването и обучението за решаване на задачи по математика и според категорията ученици, към които са адресирани. Основната част от изброените в публикацията по-горе стратегии са по-скоро стратегии за разбиране на условието и без да подценяваме тази дейност, ние ги отнасяме към първата фаза на модела на Поя. Познаването на стратегиите от психологическа гледна точка обаче ще ни подпомогне да опишем основните стратегии, които ще доминират в методите на математическото изследване. Опитът показва, че най-добро обяснение на същността на всяка стратегия се постига с разглеждане на подходящи представителни примери. Последните не само, че ще ни дадат знания в областта на задачата, но и ще подпомогнат овладяването на процесите за решаване.

Нека да се опитаме от наблюдението на тези процеси да направим съответните изводи. Ако сме изправени пред задача, в пълния смисъл на думата, едва ли ще можем да я решим незабавно, защото ако с извършване на няколко аритметични операции стигнем до бързо решение, ясно е, че си имаме работа с упражнение. За да решим задачата, се нуждаем от предварително изследване. Ето защо стратегиите, за които говорихме по-горе ще ни са от полза. Това изследване може да приеме най-разнообразни форми. Например един

подход, но определено най-ужасният, е да започнем да правим всичко, което може да ни дойде наум. Ако имате "щастливо" въображение и добър арсенал от методи, може да имате шанс да достигнете до съответното решение. Обаче, ако сте неопитен в решаването на задачи, а ако пък сте експерт, толкова повече, най-добре е да осъществите по-организиран подход. Преди всичко мислете стратегически. Не се опитвайте да решите задачата незабавно, първо обмислете задачата на не строго фокусирано ниво. Решаването на задача е като шахматна партия. Шахматистът първо мисли, после мести. Така в процеса на изселване на задачата решаващият осъзнава нейната съпротива, какви препятствия е поставила тя пред него и чрез намиране на подходяща стратегия да атакува целта. Смисълът на стратегическото мислене е да достигнем до плана, който ще ни приближи към по-добра ситуация, което определено би ни затруднило ако не приложим стратегия. Стратегиите подпомагат старта, но и помагат как да продължим. В повечето случаи обаче те дават само една бегла представа на истинската работа, която предстои да се извърши. Конкретните цели за постигане от нашия стратегически план ще се допълнят от тактиките и инструментите. Да проследим тази идея в решението на следната задача.

Да се докаже, че първата цифра след десетичната запетайка на числото

$\sqrt{1^2.2^2+2}+\sqrt{2^2.3^2+2}+...+\sqrt{9^2.10^2+2}$ *не е равна на* 9.

Тъй като става въпрос за десетично представяне на едно реално число, ще опитаме да се ориентираме в намиране на някакво негово добро рационално приближение. Външният вид на изразите, които са подкоренни величини, в отделните събираеми, показва следната

закономерност: всеки от тях е точен квадрат и към него е добавено четното число 2. В нашето въображение веднага изниква формулата за допълване на точен квадрат, която извеждаме за $x > 0$, а именно

$$\sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2 + 2x.\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

откъдето получаваме, че $\sqrt{x^2+2} < x + \frac{1}{x}$ (да напомним, че $x > 0$). Получихме едно помощно неравенство, което за нашата задача ще играе роля на помощна теорема (лема). Ще отбележим и очевидното $x < \sqrt{x^2+2}$ също за $x > 0$. Прилагаме първото неравенство за $x = 1.2$, след това за $x = 2.3$ и т.н. до $x = 9.10$.Така се получава, че

$$\sqrt{1^2.2^2+2} + \sqrt{2^2.3^2+2} + ... + \sqrt{9^2.10^2+2}$$
$$< 1.2 + \frac{1}{1.2} + 2.3 + \frac{1}{2.3} + ... + 9.10 + \frac{1}{9.10}.$$

Получената дясна част е сбор на девет цели числа, който лесно се намира и той е равен на 330. За сбора на дробните събираеми имаме изведен резултат, т.е. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{9.10} = \frac{9}{10}$ (както вече видяхме). Сега като приложим и второто неравенство, получаваме, че

$$330 < \sqrt{1^2.2^2+2} + \sqrt{2^2.3^2+2} + ... + \sqrt{9^2.10^2+2} < 330,9.$$

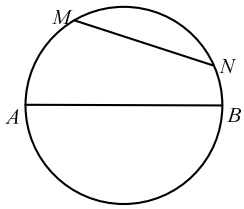
Това показва наистина, че цифрата след десетичната запетайка, т.е. цифрата на десетите, не може да е равна на 9.

Да анализираме процесите на търсене на пъти към решението. За да докажем, че въпросната цифра на десетите не може да е равна на 9, трябва да намерим аргумент за това, т.е. може да очакваме всяка друга цифра, но не 9. Ако бихме използвали специален изследователски калкулатор с големи възможности, той вероятно

щеше да ни даде по-прецизна информация за търсената цифра, но тази информация ние не можем да приемам за доказателство. Причините за това ще изясним по-нататък. При всички случаи в търсенето на тази цифра, за която е ясно, че няма да бъде намерена, ние се нуждаем от намиране на приближена стойност на разглежданото число. Това е стратегията. Формулите за допълване до точен квадрат и ”телескопичното” събиране на дробите са инструменти. Заедно с тези нива на процедиране в решението взеха участие и други фактори като увереност, че извършените пресмятания ще доведат до вярно решение, привличане към решението подходящи факти (теореми) и помощни елементи.

Ще разгледаме още едно приложение на търсене на подходяща стратегия за решаване на задачи.

В окръжност е фиксирана хорда MN, която не е диаметър. Нека AB е произволен диаметър от окръжността, който не пресича хордата MN. Да се докаже, че ако $C = AM \cap BN$, то перпендикулярът от C към AB минава през постоянна точка, независеща от положението на диаметъра AB.



Напълно естествено е да преформулираме задачата от проблем за съществуване в проблем за търсене и откриване на въпросната точка. Ако приемем, че твърдението на задачата е вярно, то търсенето на точката става определено по-лесно. Да оставим краят B на диаметъра да се движи към точката N, докато правата BN се слее с допирателната към окръжността в точката N. В този частен, да го наречем граничен случай, петата на перпендикуляра от върха C ще съвпада с точката N. Следователно търсената точка трябва да лежи върху допирателната към окръжността в точката N.

Аналогично установяваме, че последната лежи и на допирателната към окръжността в точката M. Това показва, че евентуално задачата може да се преформулира в значително по – приемлив вариант, т.е. да се докаже, че независимо от избора на диаметър AB, перпендикулярът от върха C минава през пресечната точка на допирателните към окръжността съответно в краищата на хордата. До тук с евристиката. Приложената стратегия можем да отнесем към идеята за екстремалния, граничния елемент. Сега избираме инструмента за решаване. Възможни са различни подходи, но тук е удобна изпитаната тактика на прилагане на апарата на комплексните числа в планиметрията. Ще използваме наготово някои формули, които могат да се намерят в книгата "Приложения на комплексните числа в геометрията", И. Тонов, Издателство "Народна просвета" , 1988 г.

Имаме $c=\dfrac{am(b+n)-bn(a+m)}{am-bn}=\dfrac{2mn+a(n-m)}{m+n}$ (използваме, че $b=-a$). За пресечната точка на двете допирателни имаме представянето $t=\dfrac{2mn}{m+n}$. Тогава $c-t=\dfrac{a(n-m)}{n+m}$. Разглеждаме числото $\dfrac{c-t}{a-b}=\dfrac{a(n-m)}{2a(n+m)}=\dfrac{n-m}{2(n+m)}$. Проверката, че така полученото число е чисто имагинерно, е тривиална. Следователно $CT\perp AB$, а точката T не зависи от положението на диаметъра AB.

Убеждаваме се, че наистина решаването на една задача е комплексна дейност и нейното разграничаване на нива подпомага търсенето.

Задачи и математическо мислене. Ребуси

В процеса на развитието на математиката и методиката на преподаване на математиката съществено се променя съдържанието на това , което влагаме в понятието “математическо мислене”, повишава се значително ролята на задачите, развиващи математическото мислене в процеса на обучението. Целите на образованието настойчиво изискват от учителя да провежда систематична работа за развитието на математическото мислене на учениците.

Понятието мислене е атрибут на науката, която изследва висшите умствени дейности – психологията. Едва ли в рамките на тази наука ще може скоро да се построи модел на мисленето, но много изследвания в това направления са направени, особено през втората половина на миналия век. В това отношение изключително ползотворни са изследванията върху поведението на различни индивиди, когато те описват процесите на тяхното решение на задачите. В тези експерименти, изследователят записва (протоколира) последователността от разсъждения и създава протокол. Изследвайки протокола, той анализира последователното натрупване на информация за задачата, правилата и стратегиите, които решаващият прилага. Изследователят следи как решаващият обработва и използва натрупаната към дадения момент информация. Цялата информация за задачата, с която разполага изследваният съставя едно състояние, наречено състояние на осведоменост. Всеки път когато той извърши някаква операция, състоянието на осведоменост се променя. Описанието на поведението на индивида

при решаването на задачата трябва да отрази тази последователност от изменението на съответното състояние към следващото. За целта някои психолози като А. Нюел и Х. Саймън изграждат графичен образ на съставения протокол, като свързват със стрелки прехода от едно състояние към следващото. Тази графична представа те наричат *граф на решението на задачата А от индивида Х.* Тук не става въпрос да се направи граф само на идеалните решения, а множество от графи на решенията на една задача, решавана от различаващи се по опит и способности участници. Сравняването на такива графи дава добра база за изводи относно мисленето в процеса на решаване на задачи. Графът на задачата е един от методите на разлагане на процеса на решаване на задачите на подзадачи, като се обособяват отделните етапи на решението. В такъв граф може да се проследят сполучливи или не съвсем сполучливи операции, характерни за процеса на търсене на решението. Чрез тази графична представа човек анализира своите дейности и овладява идеята за разлагане на проблемната ситуация на промеждутъчни задачи, да си поставя междинни въпроси. Ето една задача, изследвана от посочените по-горе автори.

Да се реши ребусът

$$DONALD + GERALD = ROBERT$$

Да напомним, че при подобни задачи – ребуси трябва на местата на буквите да се поставят цифри, така че на различните букви да отговарят различни цифри, а на еднаквите букви – еднакви цифри. Дадената задача е много популярна. Среща се в редица учебници по психология и ръководства по решаване на задачи. Обикновено за облекчаване на търсенето, тя се прилага с допълнителното условие $D = 5$. В последния вариант тази задача е

била предлагана и от нас на различни контингенти от ученици – 5 – 6 клас, на студенти, които се подготвят за учители, на стажанти от курсовете за следдипломна квалификация и др. Реакциите на участниците в този експеримент са били най-разнообразни, но с помощта на подходящи въпроси и инструкции, ребусът винаги е бил решен. Тези реакции могат да се допълнят и от всеки следващ опит за решаване на ребуса. Това е причината, поради която не привеждам графа на Нюел и Саймън, както и множеството натрупан изследователски материал върху решаването на тази задача от различните участници в експеримента. Понякога задачата се предлага за групово решаване.

Ще се опитаме да дадем една примерна последователност от разсъждения, които да решат ребуса, допълнително изискване към решението ще е използването само на директно (пряко) аргументиране, т.е. по схемата от А следва В.

Първото наблюдение е, че в ребуса участват 10 различни букви и следователно трябва да се намери място и за 10-те цифри. Ще разсъждаваме по колонки. От последната колонка виждаме, че $T = 0$. Да погледнем към втората колонка. Тъй като цифрата 0 е вече използвана, единственият вариант е $E = 9$, като от третата колонка ще имаме пренос 1. От предпоследната колонка следва, че R е нечетно число, защото има пренос от последната колонка. От първата понеже $D = 5$ следва, че $R > 5$, т.е. $R = 7$ или $R = 9$ и тъй като цифрата 9 е вече ангажирана, то $R = 7$. От четвъртата колонка следва, че $A = 4$ или $A = 9$ и че от предпоследната колонка има пренос. Оттук веднага следва, че $A = 4$ и $L = 8$. Освен това първата колонка показва, че след като имаме сигурен пренос от втората колонка, то $G = 1$. Останаха неизползвани цифрите 2, 3 и 6. Единствено сборът

6 + 7 = 13 осигурява пренос и използва две от останалите цифри. Следователно $N = 6$ и $B = 3$. Последната незаета цифра е 2, т.е. $O = 2$. Лесно се проверява, че така получените възможности дават решение на задачата 526485 + 197485 = 723970.

Графът на решението предлага метод на разлагане на последното на етапи, които се оформят от отделните стъпки. В един истински описан граф може да проследим успешните, неуспешни и даже погрешните ходове, възникнали в процеса на решаване на задачата от съответния индивид, които да изследваме и направим съответните изводи, предимно за решаващия, но и за качествата на самата задача. Изискването задачата да се решава само с помощта на прякото аргументиране кара решаващият да пробва такъв подход, при който да се наблюдава дали приложеното действие води към целта. Ако това е така, той продължава напред. Важното в този подход е, че от началото до края решението се осъществява с несложни стъпки.

Ще разгледаме още един пример за решаване на ребус, като този път ще приложим възможността и за индиректно (непряко) аргументиране.

Да се реши ребусът

ТРИОН+ ТРИОН= ПОПАРТ

Първото наблюдение ни дава, че на цифрата Т отговаря четно число, което е по-голямо от 5, а от първата колонка, че П = 1. Освен това от третата колонка виждаме, че $И \geq 5$, защото П е нечетно и следователно Р = 0 или Р = 5. Сега нашата задача се разклонява в две направления.

Нека Т = 6. Тогава Н = 3 или Н = 8. Приемаме, че Н = 3. Тогава Р е четно, т.е. Р = 0. От втората колонка получаваме че О = 2, защото

няма пренос, което противоречи с предпоследната колонка. Нека Н = 8. Тогава Р = 5, отново от втората колонка получаваме, че О = 3, което е противоречие с предпоследната колонка.

Нека Т = 8. Тогава Н = 4 или Н = 9. Отново разклоняваме. Нека Н = 4. Тогава Р е нечетно, т.е. Р = 0. Последното е възможно ако О = 5 от предпоследната колонка и О = 6 от втората колонка. Това е противоречие. Така този клон на графа отново "задъни". Нека Н = 9. Тогава Р е нечетно, т.е. Р = 5 и от втората колонка получаваме, че О = 7. Сега за И остана единствена възможност И = 6, откъдето получаваме

А = 3 и решението 85679 + 85679 = 171358.

Двете решения се основават на най-разпространената стратегия – тази на пробите и грешките. Счита се, че тази стратегия е вродена в човешкото същество. От най-малка възраст тази стратегия помага на малкото дете да възприема света и натрупва жизнен опит.

За такива адитивни, т.е. само с операцията събиране, ребуси съществуват готови компютърни програми. В курса по Компютърна евристика беше създадена програма, която решава ребуса $n.GEESE = FLOCK$ (колко гъски правят едно ято). След очевидното съображение, че $2 \le n \le 9$ се достигна до следния интересен резултат. Ако $n = 2,5,9$ ребусът няма решение. При $n = 3,6,7,8$ ребусът има единствено решение, а именно 3.3353 = 70149, 6.15545 = 93270 , 7.122722 = 85904 и 8.12232 = 97856. За $n = 4$ се получиха 5 решения.

Тъй като нас тук ни интересуват проблемите на изграждането на математическото мислене използването на компютърни програми засега ще оставим за по-нататък. Ще продължим с разглеждането на други методи за решаване на ребуси. Както казахме, тези задачи подпомагат стратегията на пълното изчерпване от една страна, а от

друга страна са полезни за учениците от по-малките класове да усвоят свойствата на целите числа и аритметичните операции с тях.

Да се намери

КОЙ + *ТАМ* + *ДРАЩИ* = 2 0 5 2 7

при условие, че думата КОЙ приема най-малка възможна стойност.

Забелязваме, че в този ребус има 10 различни букви и следователно тези букви ще трябва да се заменят с всичките 10 цифри. Лесно може да се установи, че *Д* = 1, а *Р* = 9. Следователно задачата се свежда до решаване на ребуса *КОЙ* + *ТАМ* + *АЩИ* = 1 527 при условие, че нямаме право да използваме цифрите 1 и 9. В така получения ребус участват 9 букви като буквата *А* се повтаря. Ако горното равенство е изпълнено, то двете страни ще дават еднакви остатъци при деление с 9, а известно е, че число дава същия остатък какъвто е остатъкът на сбора от цифрите му. Следователно *К* + *О* + *Й* + *Т* + *А* + *М* + *А* + *Щ* + *И* – *1* – *5* – *2* – *7* се дели на 9. Но *К* + *О* + *Й* + *Т* + *А* + *М* + *Щ* + *И* = *0* + *2* + *3* + *4* + *5* + *6* + *7* + *8* = *35*. Следователно *А* + 35 – 15 = *А* + 20 се дели на 9, което е единствено възможно при *А* = 7. Тъй като търсим решение с най-малко *КОЙ* опитваме с най-малката възможност за *К* = 2 и *О* = 0. Тогава *Т* = *5*, *Щ* = *4* и за останалите *Й* +*М* + *И* = 3+ 6 + 8. Следователно *Й* = *3* . Сега вече знаем цифрите от сбора на кои букви отговарят. Имаме *2 0 2 5 2 7*= *КОТКА*. Няма нищо чудно, че дращи. Видяхме, че ребусът като задача има две решения, защото буквите *М* и *И* могат да се сменят местата. В общия случай компютърната програма дава 12 решения на ребуса

КОЙ + *ТАМ* + *ДРАЩИ* = *КОТКА:*

1. 406 + 157 + 39582 = 40145
2. 407 + 156 + 39582 = 40145
3. 402 + 157 + 39586 = 40145
4. 407 + 152 + 39586 = 40145
5. 402 + 156 + 39587 = 40145
6. 406 + 152 + 39587 = 40145
7. 206 + 578 + 19743 = 20527
8. 208 + 576 + 19743 = 20527
9. 203 + 578 + 19746 = 20527
10. 208 + 573 + 19746 = 20527
11. 203 + 576 + 19748 = 20527
12. 206 + 573 + 19748 = 20527

Решенията от последните 6 реда дават всички решения на нашия ребус, а тези от ред 9 и ред 11 пък са решенията с минимално *КОЙ*.

Съображенията със сбора на цифрите и остатъците при деление с 9 са често ключов елемент от задачи по теория на числата.

Ще разгледаме още един пример. Задачата е от новогодишна честитка.

Да се намери най-малкото естествено число n, такова че след попълването на празните квадратчета с цифрите 1, 3, 4, 5, 7, 8 и 9, всяка цифра по веднъж, да се получи вярно числово равенство

$$\square\square\square\square+\square\square\square=2006+n.$$

Първата ни цел в ориентацията в условието на задачата е да си отговорим на въпроса: защо точно тези цифри? Вероятно защото имаме седем свободни квадратчета и затова са ни дадени точно

седем възможни предложения, като трябва да разположим тези цифри без повторение, т.е. всяка от тях трябва да участва точно по веднъж. Забелязваме още, че останалите (непредложени за попълване) три цифри 0, 2 и 6 вече участват в условието на задачата с определените си места. При произволно попълване на цифрите за стойността на числото n, ще получим най-различни възможности. Очевидно ако искаме да получим естествена стойност, то цифрата на хилядите в четири цифреното събираемо трябва да е 1 и това е определено еднозначно. Както и обаче да разполагаме цифрите в лявата част ще отбележим, че остатъкът при делението на получения сбор с 9 винаги ще е един и същ, защото той не зависи от местата на цифрите, т.е. той ще е равен на остатъка от делението на сбора от цифрите 1 + 3 + 4 +5 +7 +8 + 9 = 29 с 9, т.е. 2. От друга страна, ако означим с r остатъка на числото n с 9, ще имаме, че 2 + 0 + 0 + 6 + r = r + 8 също дава остатък 2 при деление с 9. Но това е възможно единствено при r = 2. Понеже търсим най-малка стойност приемаме като първа възможност, че числото n = 2, т.е. в дясната част се намира числото 2008. Единствено цифрите 5 и 3 дават сбор с последна цифра 8. (Също така 1 + 7 = 8, но цифрата 1 е вече ангажирана.) За останалите четири цифри 4, 7, 8 и 9 можем да кажем, че никои две от тях не дават сбор с цифра на единиците 0. Това показва, че при r = 2 задачата няма решение. Следващото положително число с остатък 2 при деление с 9 е 11. Тогава дясната част приема стойност 2017. Само двойките (3, 4) и (8, 9) дават резултат с последна цифра 7. Ако приемем, че цифрите на единиците на двете събираеми в ляво са 3 и 4 съответно (няма значение коя е на първото събираемо и коя е на второто) отново виждаме, че нито една от комбинациите от две цифри от останалите 4, 5, 8 и 9 не дава сбор с

последна цифра 1. Нека приемем, че цифрите на единиците на събираемите в ляво са съответно 8 и 9. Сега имаме пренос и търсим комбинация от възможни цифри със сбор 10. Очевидно това е 3 +7 и накрая остава последната възможност 4 + 5. В условието на задачата не се иска намиране на всичките решения на ребуса, само да се намери най-малката стойност на n , за която ребусът има решение. Така получихме, че търсената най-малка стойност на n е 11.Едно попълване, което решава задачата е например

1438 + 579 = 2006 + 11.

В решаването на този ребус, без да осъзнаваме това, използвахме редица евристични техники като метода на пробите и грешките, разглеждане на отделни случаи, които можем да отнесем към стратегиите, но освен това използвахме остатъци при деление с 9, което е прилагане на тактиката, която по-нататък ще наречем модулна аритметика. Отново се убеждаваме, че решаването на задачата е комплексна дейност, която съчетава дейности на различни нива.

Ще добавим още няколко интересни ребуси. Много често към изискването за решаването им се поставят условия от най-разнообразен характер – аритметичен, екстремален и др. Целта на такива изисквания са да направят задачите по – атрактивни , по – занимателни и интригуващи.

1. В ребуса ДВЕ + ДВЕ + ДВЕ = ШЕСТ на различните букви отговарят различни цифри, а на еднаквите букви – еднакви цифри. Намерете това решение на ребуса, за което числото ДЕВЕТ е най–голямо. Отговорът да се обоснове!

2. Казва се, че от мухата не трябва да се прави слон. Направете тогава от две мухи слон, т.е. решете ребуса

МУХА + МУХА = СЛОН при условие, че гласните букви отговарят на цифри с една и съща четност, а съгласните – също, но от другата четност.

3. Да се реши ребусът *ТРИ + ПЕТ = ОСЕМ*, като *ТРИ* се дели на 3, *ПЕТ* се дели на 5 и *ОСЕМ* се дели на 8.

4. Да се реши ребусът *FIFTY5 = 5.ELEVEN*, ако е известно, че числото *FIVE* е, разбира се, просто.

5. Колко души *ИСКАТ ТАКСИ*? Отговор на този въпрос е числото n, за което е в сила равенството n. *ИСКАТ = ТАКСИ*.

От разгледаните примери до тук не бива да оставаме с впечатлението, че за да се развие математическото мислене е достатъчно да се научим да решаваме ребуси. Процесът на изграждането на математическото мислене минава през овладяването на различните подходи и техники към задачите по математика. Най-общо казано съществуват два типа средства, които прилагаме при решаването на задачите – алгоритмични и евристични. Те се отличават едни от други според наличието или отсъствието на гаранция за правилност на получените резултати. Алгоритмичните средства представляват такава съвкупност от действия, че ако тези действия се приложат в правилната последователност, автоматично ще се стигни до решение. Евристичните средства в повечето случаи си представяме като емпирични правила, като процедури за описание, които относително несложно се изпълняват, които се основават на минал опит от решаване на задачи. В отличие от алгоритмичните средства евристичните не гарантират успех. Защо тогава се налага да изучаваме евристичните средства? Това е така,

защото за по-големия брой от интересните и съдържателни задачи няма открит алгоритъм, а за част от тях даже е известно, че такъв не съществува. В такива случаи се прибягва към евристичните средства. Ще завършим с някои ребуси, съставени от студенти от магистърската програма ТОМИ или слушатели на курса по Компютърна евристика.

ЗАКОНИ + ЗАКОНИ = КОДЕКС

ЗАКОНИ + ЗАКОНИ +ЗАКОНИ = КОДЕКСИ

ДВОЙКА + ДВОЙКА + ДВОЙКА + ДВОЙКА = ОСМИЦА

ПАВАЖ + 2.ДУПКИ = УЛИЦА

ВАСИЛ + ИВ+КУНЧЕВ = ЛЕВСКИ

СУ + ФМИ + КОМИ + ТОМИ = ТОНОВ.

В последния ребус, който очевидно е шега с водещия курса, КОМИ е Катедрата по обучение по математика и информатика, а ТОМИ е названието на магистърската програма. Ребусът има две решения, но за сметка на това ТОНОВ приема единствена стойност, т.е. ТОНОВ е единствен.

Да започнем да решаваме задачи

От казаното до тук стана ясно, че за да е налице успешно решаване на задачи, трябва субектът, който извършва тази дейност да е мотивиран за това и да е запознат с основните методи на математическото мислене. От голяма полза ще е и владеенето на подходящ арсенал от евристични техники. Прилагането на модела на Поя в пълния му вид също допринася за успешното решаване на задачите. Обикновено мотивацията за решаване на задачата идва и от вида на самата задача. Когато последната има интересна и интригуваща формулировка, а особено, когато тя допуска неочаквано решение, работата по нея е по-привлекателна и мотивираща.

Когато решаваме задача, още преди да се започне с пресмятанията и разсъжденията, както съветват специалистите, се опитваме да се ориентираме в условието на задачата. Както вече казахме решаването на всяка задача е строго индивидуален процес, чрез който се търси специфичен път към целта. За решаването на задачите не съществуват универсални препоръки, но съществуват някои общи подходи, с които ще се запознаем по-нататък. Много често, изправени пред съответната задача, имаме проблем с ориентацията, т.е. не е ясно как да стартираме, какво да използваме, ако сме направили някоя стъпка, дали е в правилно направление, как да продължим и т.н. Ще дадем пример на задача, която носи забавен характер и има интересен подход при ориентацията.

Поканих на гости 10 съпружески двойки. Попитах всеки от гостите и жена ми, с колко души се е ръкувал. Оказа се, че всеки от запитаните ми е дал различен от останалите

отговор. Ако предположим, че никой не се е ръкувал със своя брачен партньор, с колко души се е ръкувала жена ми?

В духа на даденото определение за задача, наистина сме изправени пред такава. Сега да забележим, че броят на анкетираните е бил 21 и следователно броят на отговорите ще е също 21. Но тъй като всичките участници в приема са 22, от условието на задачата следва, че тези отговори съставят множеството от числа $\{0,1,2,...,20\}$. Ясно е, че никой не се е ръкувал със себе си. Едва ли е съществен за задачата броят на поканените съпружески двойки. Подобен въпрос може да се постави и за 5, 8 или някакъв друг брой двойки. Това ни дава идеята да разгледаме задачата със само една поканена двойка. По-късно такава идея ще наречем стратегия – да разгледаме по-лесна задача или да разгледаме частен случай. Защо постъпваме по този начин? При новата задача броят на възможните изходи е минимизиран и търсенето се извършва значително по-лесно. Сега вече възможности за отговор са 0, 1 и 2. Ясно е, че в новата ситуация човекът с отговор 2 не е жена ми, защото в противен случай никой от гостите ми не е в състояние да каже 0. Следователно някой от гостите е човекът с отговор 2. Това означава, че този човек се е ръкувал с мен и жена ми, защото няма ръкувания в семейната двойка. Следователно партньорът на този човек е казал 0, защото жена ми вече има едно ръкуване. Картината е ясна – жена ми се е ръкувала с един от двамата гости, единият от тях е с две ръкувания, а другият - с 0 ръкувания.

Задачата е решена в този частен случай, но все още не става ясно как да решим задачата за 10 поканени двойки. Нека да добавим още една двойка, т.е. нека гостите са четирима – две двойки. Тогава множеството от отговори се състои от числата 0, 1, 2, 3, 4. Отново

съобразяваме, че в новата ситуация жена ми не е дала максималния отговор 4, по причина, че тогава няма как да се е появил отговор 0. Партньорът на човека с отговор 4 трябва да е дал отговор 0. В този момент е направена съществената крачка към изясняване на проблема. Чувстваме, че хората с отговори 1 и 3 съответно са също брачни партньори. Имаме ли основание за това? Наистина, ако изключим от компанията двойката, за която имаме пълна информация, ние оставаме в ситуацията от предишния случай, при който един от гостите ще има две ръкувания, а другият – нула измежду четиримата. Като добавим броя на ръкуванията на вече напусналия гост, се получава наистина, че броят на ръкуванията на един от гостите е 3, а на другия – 1. Остава отговорът 2, който е бил даден от жена ми.

Сега се разкрива пътят към решаване на задачата за n съпружески двойки. Множеството от отговори в този случай е $\{0,1,...,2n\}$. Вече имаме идея с какво да започнем. Ще отбележим, че жена ми не е дала отговор $2n$ и следователно хората с отговори 0 и . $2n$ са партньори. Ако изолираме тази двойка попадаме в ситуация да приложим принципа на математическата индукция, за която ще поговорим допълнително. Следователно жена ми е провела n на брой ръкувания, а на първоначалната задача, отговорът е 10.

Какво научихме от това решение? Разгледахме някои по-лесни случаи с цел ориентация в условието на задачата и реализирахме идея за “спускане” надолу, т.е. използване на математическа индукция или по-точно идеята за екстремален (най-голям или най-малък) елемент. Разбира се, не споменаваме и другите фактори, които съпътстваха решението – като интуиция, идея за обобщение и специализация, увереност, че целта става все по-близка,

концентрация и др. Последните носят повече психологически характер и те внасят здрав разум в процедурите, служат ни за ориентацията в обстановката, помагат ни да направим първите стъпки. Постепенно обаче тези психологически стратегии преминават в математически. Разбира се, отново ще подчертаем, че няма да търсим разграничение между двата вида стратегии, защото и математиката е проява на здравия разум на човечеството.

Решаването на всяка задача съдържа в себе си две основни части: изследователска, където се ориентираме и доказателствена, в която убеждаваме другите, а и себе си, с резултатите от нейното решаване. Именно в стратегиите определяме нивото на изследователската част, а в доказателствената част доминират тактиките и инструментите, затова нито една от тези две части не трябва да бъде подценявана. В следващата задача ще видим голямата роля, която играят както психологическите фактори, така и математическите техники.

Редицата от числа на Фибоначи (F_n) *се дефинира по следния начин:* $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *. Да се намерят всички числа на Фибоначи* F_n*, за които* $2^{F_n} + 1$ *е просто число.*

Да напомним, че едно естествено число се нарича просто, ако то освен числото 1 и себе си няма други естествени делители, като числото 1 не се счита за просто. Ще се опитаме да изясним в какво се състои същността на задачата, т.е. започваме с фазата на разбирането на условието. Да си изясним какво означава за степенния показател k числото $2^k + 1$ да е просто, т.е. то да не се разлага в произведение. Ще използваме известната формула

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + b^{2n}\right),$$

която лесно се получава след разкриване на скобите, за да съобразим, че ако 2^k+1 е просто, то k не може да има нечетен делител по-голям от 1. Това е възможно само, ако числото k е степен на числото 2, т.е. $k=2^n$. Следователно отговорът на задачата зависи от отговора на въпроса "Кои от числата на Фибоначи са степени на числото 2?" По този начин ние сме изправени пред нова задача, същността на която е горният въпрос. Така получената задача не е еквивалентна на разглежданата, защото не сме сигурни, че всяко число от вида $2^{2^n}+1$ е просто. Историята разказва, че такива числа е разглеждал П. Ферма като за $n=0,1,2,3,4$, той установява че получените стойности са прости числа. Тъй като за по-големи стойности за n се получавали много големи числа, Ферма предположил, че всяко от числата $2^{2^n}+1$ е просто. Но още при $n=5$, Ойлер забелязва, че числото 641 е делител на $2^{32}+1=2^{2^5}+1$. Пак от историята на математиката знаем нещо повече за тези числа. Досега не са известни други прости числа от разглеждания вид, освен намерените от Ферма. Това не означава, че няма други такива числа, а просто, че засега на науката съществуването на такива числа е неизвестно. Независимо от тази не дотам ясна перспектива, ние виждаме в новата задача нещо като "предпоследна" стъпка към решаване на оригиналната задача. За тази част от историята на математиката ще разкажем по-нататък.

Сега започваме да търсим подходяща стратегия за новата задача. Отново с цел ориентация, ще извършим малко "черна" работа, а именно ще посмятаме малко числа на Фибоначи. Имаме $F_1=F_2=1,\quad F_3=2,\quad F_4=3,\quad F_5=5,\quad F_6=8,\quad F_7=13,\quad F_8=21,\quad F_9=34,$ $F_{10}=55$ и т.н. Целта на натрупването на тези данни е да открием поне някои от решенията на задачата. Понякога разглеждането на такъв

списък от данни ще ни подпомага за откриване на някоя закономерност, необходима за изясняване на някои вътрешни връзки между елементите на задачата. От направения списък става ясно, че в него само числата $F_1 = F_2 = 1,\ F_3 = 2$ и $F_6 = 8$ са степени на двойката и за тях, както знаем от сметките на Ферма, а и сами можем да проверим, че съответно числата $2^{F_1} + 1 = 3, 2^{F_3} + 1 = 5$ и $2^{F_5} + 1 = 257$ са прости. Дали има още числа на Фибоначи, които са степени на числото 2? Тук натрупаният експериментален материал не може да помогне и затова ще ангажираме нашата интуиция в търсене на нова "предпоследна стъпка". Тя уверено ни подсказва, че едва ли ще намерим нови числа на Фибоначи – степени на 2. От къде идва тази увереност? От направените по-горе наблюдения стана ясно, че ако число на Фибоначи F_n е степен на 2, по-голяма от 5, то отговорът дали $2^{F_n} + 1$ е просто води до проблем, за който споменахме, че засега математиката не разполага с информация. Едва ли една задача, даже и да е от типа на така наречените олимпиадни, може да ни сервира подобна изненада! (И ако това не е психологически мотив?!). Ето защо уверено формулираме хипотезата.

Освен намерените стойности 1, 2 и 8 няма други числа от редицата на Фибоначи, които са степени на числото 2.

Тази доста благоприятна и правдоподобна хипотеза ни поставя пред нова задача, защото колкото и да е добра една хипотеза, тя не може да играе никаква роля, докато не е доказана. Отново правим опит за търсене на подходяща стратегия. Ясно е, че ако има число на Фибоначи, което е различно от 1, 2 и 8, такова число ще се дели сигурно на 16. Правим нова "правдоподобна" хипотеза. Дали измежду числата на Фибоначи има въобще кратни на 16? Ако това е

така, това ще е новата “предпоследна стъпка”. Доказването на новата хипотеза просто би решило задачата и още веднъж ще ни мотивира да правим предположения, които разкриват “скрития” път. Ще продължим отново с малко черна работа – ще изучим редицата от остатъци на числата на Фибоначи при деление с 16 (Още една увереност: редицата от остатъци ще “зацикли”, т.е. тя ще стане периодична и това лесно може да бъде доказано например с помощта на принципа на Дирихле). Ето я тази редица

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 5, 2, 7, 9, 0, 9, 9, 2, 11, 13, 8, 5, 13,2, 15,1, 0, 1,1,...

Както и очаквахме! Двете последни единици показват, че редицата наистина зацикли, но хипотезата, че няма числа на Фибоначи, кратни на 16, се оказа невярна. Все пак за да не отиде трудът ни напразно, можем да отбележим, че в редицата на Фибоначи има числа, кратни на 16 и тези числа са с номера кратни на 12, т.е. F_{12}, F_{24} и т.н. Нека пресметнем F_{12}. Имаме $F_{11} = 34 + 55 = 89$ и $F_{12} = 55 + 89 = 144$. Стойността на F_{12} показва, че макар да се дели на 16, тя не е степен на 2, защото се дели на 3. Това създава условие за възникване на нова хипотеза – числата на Фибоначи, които се делят на 16, т.е. тези с номера кратни на 12, се делят освен това и на 3. Отново преминаваме към черна работа, като проследим остатъците при деление на числата на Фибоначи с 3. Отново сме убедени в зациклянето на тази редица. Имаме 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1. Наистина редицата зацикли и се вижда, че всяко число на Фибоначи с номер, кратен на 4, се дели на 3. По тази начин дадохме отговор за търсените числа в условието на задачата – това са числата 3, 5 и 257.

Да опишем средствата, които използвахме в решението на задачата – формулиране на по-проста задача, създаване на списък със експериментални данни, “черна” работа при прилагането на модулната аритметика, създаване на хипотези, разбиване на решението на “предпоследни” стъпки и не на последно място интуиция, чувство за ориентация, увереност и стабилност във всеки момент на решението. Цялата тази съвкупност от дейности доведе до успешен финал – решаването на задачата. Освен това си струва да оценим високо ролята на нематематическите стратегии – те не решават, но съществено подпомагат разкриването на пътя към намиране на решението.

Предлагаме следната задача, чрез която читателят ще може да опита да приложи своята увереност, воля и издръжливост.

Колко измежду първите 2000 числа на Фибоначи имат за цифра на единиците цифрата 2?

Да използваме свойствата на числата

Да си припомним “определението” за задача, дадено от четвъртокласника – група от думи, в която има и числа. Много хора, неизкушени от математиката, считат последната за наука за смятането с числа. Наистина, числата заемат голяма част от математиката, но те далеч не съставят единствената област на тази наука. Все пак, има много задачи, в които числата играят съществена роля и познаването на свойствата им дава предимство за решаващия подобни задачи. Специалистите, например, съветват учениците да знаят стойностите на точните квадрати на естествените числа поне до 100 или да контролират пресмятанията си чрез използване на подходящи системи от остатъци и др. Познаването на природата на числата е изключително полезно средство за решаване на задачи. Може да изброим някои полезни свойства – сборът на две четни или две нечетни е четно число, произведението на нечетни числа е нечетно, квадратът на число с последна цифра 5 се получава като зачеркнем тази цифра, това число умножим със следващото го и накрая запишем 25 и много други. Ще започнем с една забавна задача, решението на която няма как да се получи с традиционните методи, които използваме.

В една верига за бързо хранене провели рекламна кампания. С всеки закупен продукт, клиентите получавали по случаен начин по едно картонче, на което е записано по едно цяло число. Ето някои от типичните картончета – 3, 9, 12, 15, 21, 30, 36, 39, 45, 51, 66, 84, 87, които се разпространявали по касите. Ако клиентът можел да представи картички, които дават точен

сбор 100, получавал бонус от 100 лева, които можел да ползва в тази верига. Може ли да предложите на собствениците на тази верига такава организация на разпространяване на картичките, така че броят на бонусите да не е по-голям от 10?

Вероятно сте забелязали, че всички примерни картончета от условието на задачата са все числа, кратни на 3, което означава, че точен сбор 100 е невъзможен. За да се получи сбор 100 са необходими картончета с числа, които не се делят на 100. Ако искаме да ограничим броят на бонусите до 10, освен посочените по-горе картончета, можем да пуснем в обръщение, най-много 20 картончета, да кажем с написано числото 1.

Да разгледаме няколко задачи, която са по-скоро контролни въпроси към темата прости числа.

За три прости числа $p < q < r$ *е известно, че* $p + q = r$ *. Да се намери числото* p.

Обикновено простите числа са нечетни, но тогава равенството $p + q = r$ е невъзможно. Единственото просто нечетно число е 2 и следователно $p = 2$. За числата q и r имаме много възможности, например 2 +3 = 5 или 2 +5 = 7. Простите числа в двойката (q, r), за които се наричат числа близнаци. Не е известно, дали двойките прости числа близнаци са краен брой или са безбройно много.

Нека a *и* b *са прости числа, а* c *е естествено число, такива че* $a^2 + b^2 + 1 = c^2$. *Да се намери* c.

Да отбележим следното много полезно свойство на квадратите на целите числа: Квадратът на четно число се дели на 4, а квадратът на нечетно число дава остатък 1 при деление с 4, нещо повече

квадратът на нечетно число дава остатък 1 при деление даже с 8. Ако двете прости числа a и b са нечетни, то числото c също ще е нечетно. Но тогава остатъкът от делението на a^2+b^2+1 при деление с 4 ще бъде равен на 3, което е невъзможно, защото остатъкът от деление на c^2 е 1. Следователно поне едно от прости числа a и b е четно,т.е. без ограничение, можем да считаме, че $a=2$. По такъв начин задачата се редуцира до следната: Да се намери c ако $b^2+5=c^2$, ако b е просто число. Ако b е нечетно число, лявата част на равенството ще дава остатък 2 при деление с 4, т.е. c ще е четно. Но това не е възможно защото c^2 се дели на 4. Остава b да е четно, т.е. $b=2$, откъдето $c^2=9$ и тъй като c е естествено число, то $c=3$. Числото 3 е просто и с това задачата е решена.

Числата a,b,c и $a^4+b^4+c^4-3$ са прости. Да се докаже, че числото $a^2+b^2+c^2-1$ е също просто.

Ако трите прости числа a,b,c са нечетни , то $a^4+b^4+c^4-3$ ще е четно число и не може да е просто. Следователно поне едно от тях е четно, т.е. равно на 2. Без ограничение приемаме, че $a=2$. Сега ситуацията от задачата се редуцира до следния вариант: Числата b,c и b^4+c^4+13 са прости. Ще използваме още едно полезно свойство на числата. Ако n не се дели на 3, то n^2-1 се дели на 3.Ако приемем, че нито едно от простите числа b и c не се дели на 3, то $b^4+c^4+13=\left(b^4-1\right)+\left(c^4-1\right)+15$ ще се дели на 3, но това е невъзможно, защото това число е просто. Следователно поне едно от простите числа b и c се дели на 3, което означава, че е равно на 3. Без ограничение приемаме, че $b=3$ и редуцираме ситуацията до това, че c е просто и c^4+94 е също просто. Още едно свойство на

числата ще ни е необходимо, а именно – ако едно число n не се дели на 5, то $n^4 - 1$ се дели на 5. Последното свойство можете да докажете самостоятелно или да се позовете на много популярната теорема, известна като Малката теорема на Ферма. Ако p е просто число и n е естествено число, което не се дели на, то $n^{p-1} - 1$ се дели на p. В нашия случай, ако c не е равно на 5, ще получим, че $c^4 + 94$ ще се дели на 5. Остава единствена възможност за простите числа a, b, c да са без значение в какъв ред съответно рано на 2, 3 и 5. Но тогава $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 4 + 9 + 25 - 1 = 37$ и така полученото число е просто.

От разгледаните примери разбрахме колко е важно да познаваме и разбираме свойствата на числата. За изучаването им е създадена една от най-старите и най-популярни математически дисциплини – аритметиката, която сега наричаме теория на числата. Основната релация, която тази наука изучава е делимостта. Но в учението на числата има и много други красиви елементи, които могат да присъстват в нашите задача.

Да се докаже, че ако едно 6-цифрено число се дели на 13, то и числото, получено от даденото като запишем последната цифра на даденото на първо място, а нея изтрием, също се дели на 13.

За делимост на някои числа са открити признаци. Такива признаци има и за делимост на 13, но те изглеждат доста сложно, запаметяването им изисква усилия, а приложението им е сравнително ограничено. Да започнем с ориентацията. Става дума за 6-цифрено число, но особено внимание се отделя на неговата последна (шеста) цифра, затова означаваме даденото число по следния начин $A = 10N + x$, където N е 5-цифрено число, а x е цифра. Твърди се, че

числото $B = 10^5 x + N$ също се дели на 13. Вече се ориентирахме и сега трябва да решим с какво да продължим. Предварителният анализ показва, че твърдението носи общ характер, т.е. то би трябвало да е вярно за всяка такава ситуация, т.е. N е произволно 5-цифрено число и x е произволна цифра. Това ни дава основание да разгледаме изразът $10B - A = \left(10^6 - 1\right)x$, в който числото N не участва (казваме, че сме елиминирали N). Сега остава да проверим числото $10^6 - 1 = 999999$. Последното очевидно се разлага в произведение 999.1001. Целта е вече постигната. Достигнахме до знаменитото число 1001 – знаменито не от арабските приказки "1001 нощи" за Шехеразада, а защото то се разлага по интересен начин 1001 = 7.11.13. Така получаваме, че числото $10B - A = \left(10^6 - 1\right)x$ се дели на 13 и понеже A се дели на 13, следва, че и B се дели на 13. Свойството на числото 1001 намира приложение в решаването на много задачи и си струва да му обърнем внимание.

Да се докаже, че девет цифрено число, в десетичния запис на което участва всяка ненулева цифра и цифрата на единиците му е 5, не може да е точен квадрат.

Каквито и съображения да имаме, ние ще приемем, че съществува такова девет цифрено число с описаните в условието изисквания, ще изучим неговите свойства и ще се опитаме да намерим някакво противоречие. Нека n е числото, за което n^2 е девет цифрено, в записа на което участва всяка ненулева цифра и последната му цифра е 5. Ясно е, че и последната цифра на n е също 5, т.е. $n = 10m + 5$. Както споменахме по-горе, за да запишем n^2 записваме в десетичен запис числото $m.\left(m+1\right)$ и накрая дописваме 25. Остават ни още 7 цифри. Да се опитаме да разберем коя е трета

цифра на n^2 от дясно на ляво. Това трябва да е последната цифра на $m.(m+1)$. Видът на тази цифра зависи от последната цифра на m. Можем да проверим като даваме последователни стойности за последната цифра на m. При последна цифра на m, равна на 0, 1, 2, 3, 4, 5 , 6, 7, 8, 9 получаваме за последната цифра на $m.(m+1)$ съответно 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2 , 0. От това разглеждане получаваме, че третата отзад напред цифра на n^2 може да е само 6. Следователно $n^2 = 1000x + 625$. Това число сигурно се дели на $125 = 5^3$, защото 1000 и 625 се делят на 125. Но ако едно число се дели на $125 = 5^3$ и е точен квадрат, то трябва да се дели на $625 = 5^4$. Последното е възможно само ако x се дели на 5. Пак от свойствата на числата знаем, че числата, които се делят на 5 могат да имат за последна цифра само 0 или 5, което е невъзможно (тези цифри са вече заети). Следователно такова число не може да е точен квадрат.

Методът на пробите и грешките или пълното изчерпване

При попълване на ребусите използвахме стратегия, същността на която се състоеше в разглеждането на всички възможности за разположение на цифрите. Видяхме, че при това изчерпване на възможностите прилагахме съображения, с цел намаляване на обема от разсъждения, защото по някога тези изчерпвания отнемат много технологично време. Идеята за пробите и грешките е вродена в човека. За овладяването на тази идея не се налага специално обучение. Това, което ще се опитаме да направим тук, е да систематизираме приложенията на този метод, за да бъде той ефективен и полезен. Приложението на метода на пробите и грешките срещаме пред всичко в работите на малките ученици. По тази причина някои специалисти препоръчват при обучение в решаване на задачи да се избягва методът на пробите и грешките за сметка на други методи, при които търсенето на решенията да е резултат на логически разсъждения. Тези наблюдения се потвърждават и от наблюденията върху решенията на обучавани системно студенти – бъдещи учители по математика и студенти от следдипломното обучение, което се посещава от студенти-нематематици с добра, но несистемна подготовка в решаване на задачи. В работите на последните преобладават методите на пълното изчерпване за сметка на стратегиите и тактиките, които са били изучавани от студентите и които в повечето случаи водят до по-кратки решения. Тези констатации обаче не бива да доведат обучението в решаване на задачи до пълното отричане на метода на пробите и грешките. Напротив, там където методът работи

пълноценно не се налага неговото игнориране. Методът на пробите и грешките е преди всичко основа на здравия разум. Ето един пример от моята практика. На едно състезание за 7 клас предложих следната задача с две подусловия.

Да се намерят всички три цифрени числа, които се делят на 7 и на 11, всички цифри на които са

а) четни ;

б) нечетни.

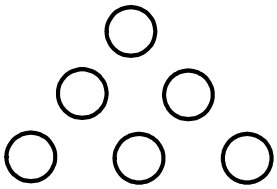
Задачата се считаше за сравнително трудна, защото в решението се използваше признака за делимост на 11, съображения за четност и нечетност и накрая метода на осъзнатото пълно изчерпване. За голямо учудване на Комисията, се оказа, че всички участници бяха решили задачата бързо и кратко. Съображението, което бе използвано, се състои в това, че търсените числа са кратни на 7.11 = 77 и след написването на всички трицифрени кратни на 77, които са само 11 на брой, се отсява отговорът – 462 и 539. Това просто показва, че съставителят на задачата не се е съобразил с оптималния избор на стратегия.

По същество методът на пробите и грешките прераства в метод на пълното изчерпване. Последният е естествено развитие на метода на пробите и грешките, но е логически издържан и напълно законен за прилагане. Той потвърждава препоръките на психолозите за разлагането на задачата на множество по-малки задачи. Този метод ни приучва да усвояваме организираното въвеждане на ред в понякога трудно обозримото пространство от изходи на задачата. Известният автомобилостроител и изобретател на конвейера Хенри Форд казва: ”Нищо не може да бъде особено трудно, стига да можете да го разбиете на дребни дейности” . Конвейерът е блестящо

потвърждение на тези думи. Сложната задача да се изработи автомобил се оказва обединение на “дребни дейности”.

Какъв е механизмът на метода на пълното изчерпване? Обикновено разсъждаваме какво би станало, ако е вярно някакво твърдение, а след това, ако това твърдение не е вярно. При всички случаи тази схема “вкарва” в задачата свежа информация, която обогатява данните от условието.

Поставете всяко от числата 1, 2, 3, 4, 5 и 6 в кръгчетата, така че сборът на числата върху всяка страна на триъгълника да е равен на 12.

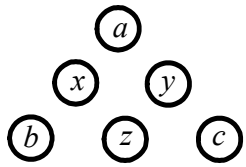


Ще предложим с учебна цел различни подходи за решаване на задачата. Според предложената схема, последователно ще предполагаме, че е налице някакъв случай, ще го проверяваме и ако той не е приемлив, ще го отхвърляме.

- ✓ Първи подход. *Случаен избор на случаите.* Можем да си изрежем 6 кръгчета и на всяко от тях да запишем по едно от числата 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторение, след което поставяме върху кръгчетата на дадения триъгълник изрязаните кръгчета и отчитаме дали направеното разположение удовлетворява изискването и ако това не е така правим ново разполагане на кръгчетата, докато не стигнем до решение. Ясно е, че ако постараем да не повтаряме вече наредена преди това ситуация, ще достигнем да решение или ако няма такова, ще установим това, тъй като възможностите за такива разполагания са краен брой. Този подход едва ли ви е харесал, защото е скучен и разчита на голяма доза шанс за бързо откриване на решението.

- ✓ Втори подход. *Систематичен избор на случаите.* Поставяме най-напред кръгчетата с числа 1, 2 и 3 във върховете на триъгълника. Забелязваме, че между 1 и 2 не можем да поставим някое от числата 4, 5 или 6, така че да се получи сбор 12. Нещо повече, виждаме, че числата 1 и 2 не могат да се разположат във върхове а триъгълника едновременно. След това поставяме 1, 3 и 4 във върховете И пак виждаме, че между 1 и 3 не може да се постави подходящо число, което с тях да дава сбор 12. Продължаваме така, докато изчерпим всички възможни тройки за върховете. Този подход също е скучен и не се отличава много от подхода със случаен избор на случаите.
- ✓ Трети подход. *Избор на случаи в резултат на изследване.* Поставяме числото 1 в горния връх на триъгълника. Търсим две двойки числа със сбор 11, за да ги поставим върху страните с този връх. Но такава двойка има само една 5 + 6 = 11. Това ни показва, че числото 1 не може да е поставено във връх. Сега поставяме числото 2 в торния връх. Търсим две двойки със сбор 10. Отново има само една такава 4 +6 = 10. Следователно и числото 2 не може да е във връх. Поставяме числото 3 в горния връх. Търсим две двойки със сбор 9. Такива се 4 + 5 = 3 + 6 = 9. Но числото 3 е заето, т.е. може да се използва само първата. Така установяваме, че във върховете могат да се разположат само числата 4, 5 и 6. Остава да поставим 3 между 4 и 5, 2 между 4 и 6 и 1 между 5 и 6.

✓ Четвърти подход. *Решаване на задачата след предварително изследване.* Ще приложим сега една друга стратегия – въвеждане на буквена символика. Нека с буквите a, b, c, x, y, z сме маркирали числата в кръгчетата, както е показано на фигурата.



Тогава $(a+x+b)+(b+z+c)+(c+y+a)=36$.

Понеже $a+b+c+x+y+z=1+2+3+4+5+6=21$,

то $a+b+c=36-21=15$. Но сбор 15 имаме само ако числата a, b, c са 4, 5 и 6. Нататък е ясно. Този подход по нататък ще предпочетем да наричаме инференциално търсене.

Четирите подхода показват различни варианти на търсене на решението. Случайният избор на случаите е добър за стартиране и ориентация, но вероятността да се получи обърквене от големия брой възможности е доста голяма. Систематичният избор на случаи се оказва по-полезен, защото се създава схема на изчерпване, която по-лесно проследява дали са разгледани всички възможни случаи. Подобен коментар може да се направи и за третия подход. Въобще при използване на стратегията на пълното изчерпване е от особено значение изграждането на системата за проследяване на отделните случаи и контролът на ефективността на тази система. Най-общо казано, обаче, методът на инференциалното търсене е най-добър измежду останалите, защото пести време, намалява вероятността за допускане на грешки и осигурява повече информация за разглеждане на решението. Следователно при прилагане на метода на пробите и грешките ще се стремим, колкото е възможно повече да използваме предварителни изследвания, т.е. да прилагаме инференциален метод

на пробите и грешките. Ще илюстрираме тези идеи със задача от популярния конкурс на списание “Математика”.

Покажете, че при $k = 77$ *числото* $\frac{1}{1001} + \frac{2}{1001} + ... + \frac{k}{1001}$ *е цяло.*

Намерете най-малкото естествено число $k > 77$*, за което горното число е цяло.*

Сборът от разглежданите дроби може да се представи във вида $\frac{k(k+1)}{2.1001}$. При $k = 77$ последната е равна на $\frac{77.78}{2.1001}$. Сега опростяваме този резултат като използваме, че 77 = 7.11, 78 = 2.3.13 и спомената важно свойство на числото 1001 = 7.11.13. Получаваме $\frac{7.11.2.3.13}{2.7.11.13} = 3$. Понеже търсим следващото цяло число k, за което стойността на сбора на дробите е също цяло число, можем да подходим по метода на пълното изчерпване. Едва ли ще приемем обаче прилагането на този метод като започнем пробите с $k = 78, 79, 80,$ и т.н. докато стигнем до търсеното число. Ако знаем, че това може да стане с помощта на малък брой проверки, има резон да постъпим така. Но тъй като нямаме гаранция колко голямо е това число или даже дали въобще има такова число, този начин на изчерпване е неприемлив. Затова ще предприемем инференциално търсене, т.е. след предварително изследване. Целта е намирането на най-малкото цяло число $k > 77$, за което $k(k+1)$ се дели на 7, 11 и 13 едновременно. Следователно някое от числата k или $k+1$ трябва да се дели на произведението на две от простите числа 7, 11 и 13, а другото на третото. Сега изследването върви по следния план. Най-малкото число, по-голямо от 77, което е произведение на две от простите числа е 91 = 7.13. Но нито 90, нито 92 се дели на 11.

Продължаваме проверката за 143 = 11.13, след това за 2.77 = 154, 2.91 = 182. Тези числа не дават решения. Следващият кандидат за проверка е числото 286= 2.143 = 2.11.13. Тогава $k+1=287$, а последното число се дели на 7. Видяхме, че за нито едно от числата $77<k<285$ не е възможно стойността на сбора от разглежданите дроби да е цяло число. При $k=286$ получаваме за стойността на сбора $\frac{2.11.13.7.41}{2.7.11.13}=41$. Следователно търсеното число е $k=286$.

Ето още един пример, в който предварителното изследване води до бързо и икономично разглеждане на появилите се случаи. Задачата е публикувана в едно от най-престижните списания за решаване на задачи по математика “Crux mathematicorum” и за решението на задачата, авторът прилага компютърна програма. Такава идея, да се използват компютърни средства, е много дискусионна. С помощта на подобни средства може не само да се _извършват числени експерименти, но и да се проведе полезна евристична дейност. Все пак предлаганата задача е елементарна и атака с такива мощни средства, като компютър са за предпочитане да се избягват. Нека запазим компютъра за по-крайни ситуации. Ето самата задача.

Да се намерят всички шестцифрени числа $\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}$, *които са точни квадрати и* $\overline{b_{1l}b_2b_3}=\overline{a_1a_2a_3}+1$.

Едно компютърно изчерпване може да проследи всички трицифрени числа $p=\overline{a_1a_2a_3}$, след което да провери кои от числата $1000p+p+1=1001p+1$ са точни квадрати. Броят на проверките може да се намали ако съобразим каква може да е последната цифра на точен квадрат или последните две цифри на точен квадрат. Ще се

опитаме да редуцираме броя на проверките като направим някои наблюдения. Нека $1001p+1=n^2$. (Ясно , е че $n<1000$). Тогава $1001p=n^2-1=(n-1)(n+1)$. Отново използваме разлагането 1001 = 7.11.13. Полагаме $1001=ab$. Нека $n-1=ax$ и $n+1=by$, където $xy=p$. Ясно е, че x и y са най-много трицифрени. Имаме $by=n+1=dx+1+1=ax+2$. Параметърът a приема стойностите 7, 11, 13, 77, 91 и 143, а тогава b ще е равно съответно на 143, 91, 77, 13, 11 и 7. Сега можем да започнем изчерпването. Ако $a=7$ и $b=143$, получаваме линейното диофантово уравнение $143y=7x+2$. За подобни уравнения има описан алгоритъм за решаването им, на който няма да се спираме, а ще посочваме направо решенията, за които $ax<1000$. В този случай получаваме $x=61, y=3$, откъдето $p=61.3=183$. Така получихме едно решение 183184. При $a=11$ и $b=91$ получаваме $x=8$ и $y=66$, откъдето $p=66.8=528$ и още едно решение 528529. Аналогично при $a=11$ и $b=77$, получаваме съответно $x=65, y=11$, откъдето $p=65.11=715$ и решението е 715716. При $a=77$ и $b=13$ получаваме $x=2, y=12, p=2=12=24$. Полученото число не е трицифрено. Този случай не дава решение. Нека $a=91, b=11$. Тогава $x=3, y=25, p=3.25=75$ и в този случай задачата няма решение. Накрая, при $a=143, b=7$ получаваме $x=4, y=81, p=328$, откъдето достигаме до последното решение 328329. Окончателно задачата има 5 решения. Броят на решенията на задачата потвърждава правилността на избора на стратегията на пълното изчерпване.

Ще продължим с една много популярна задача, в която ще комбинираме методите на изчерпването с методите на изследването и на инференциалното търсене..

С помощта на 10-те цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, като използвате всяка от тях точно по веднаж запишете 10-цифрено число, такова че числото съставено от първите му две цифри да се дели на 2, числото, съставено от първите му три цифри да се дели на 3, числото, съставено от първите му четири цифри да седели на 4 и т.н., а самото число да се дели на 10.

Ние не знаем дали такова разположение е възможно, но както вече много пъти сме постъпвали, приемаме, че такова 10-цифрено число съществува и започваме да изследваме неговите свойства. Първото наблюдение, което веднага може да се направи, е че последната цифра на търсеното число е 0, поради признака за делимост на 10. От тук следва, че както и да са попълнени останалите цифри, числото съставено от първите девет цифри ще се дели на 9. Числото, съставено от първите 5 цифри трябва да се дали на 5. Следователно от признака за делимост на 5, следва, че петата цифра е 5 или 0, а тъй като нулата е вече ангажирана, заключаваме, че петата цифра е 5. Остава да намерим местата на останалите осем цифри. Сега ще извършим едно малко по-сложно наблюдение. Тъй като числата, съставени от първите няколко, но четен брой цифри, трябва да се делят на четни числа, то четните цифри 2, 4, 6, и 8 трябва да заемат четни позиции и тогава за останалите нечетни цифри 1, 3, 7 и 9 остават нечетните позиции в търсеното число. Сега ще използваме стратегията “Да познаваме свойствата на числата” , като се опитаме да уточним признака за делимост на 4. Този признак

гласи, че едно число се дели на 4, когато числото, съставено от последните му две цифри се дели на 4. Но как да разпознаваме кратните на 4 в множеството на двуцифрените числа? Лесно се вижда, че ако цифрата на десетиците е четно число, цифрата на единиците може да е само 0, 4 или 8, а ако цифрата на десетиците е нечетна, цифрата на единиците е 2 или 6. Това показва, че на четвърта и осма позиция на търсеното число трябва да се намират цифрите 2 и 6, но ние не знаем коя от тях точно на кое място се намира. За цифрите 4 и 8 остават втората и шестата позиция. Постепенно картината се прояснява, но все още не можем да определим точното разположение на цифрите. От признака за делимост на 3 и условието на задачата, следва че сборът от първите три цифри ще се дели на 3. Освен това сборът от първите 6 цифри също ще се дели на 3, откъдето заключаваме, че сборът на четвъртата, петата и шестата цифри ще се дели на 3.Сега можем да приложим метода на изчерпването. Тъй като петата цифра на търсеното число е 5, а шестата може да е само 4 или 8, то от признака за делимост на 3 следва, че като вземем предвид четвъртата цифра (да напомним, че тя е 2 или 6) получаваме за числото, съставено от средните три цифри само следните възможности 258 или 654. За всяка от двете възможности местата на четните цифри са идентифицирани. Ако в числото се среща последователността 258, цифрата 4 е на втора позиция, а цифрата 6 е на осма. Ако в търсеното число се среща последователността 654, цифрата 8 е на втора позиция , цифрата 2 е на осма. Сега продължаваме с една разновидност на метода на пълното изчерпване, а именно “Разглеждане на всички случаи”. Фактически ние сме изправени

пред две независими задачи – когато в средата се среща последователността 258 или когато се среща последователността 654.

Ще започнем с първия случай, когато имаме последователността 258. Числото, съставено от седмата, осмата и деветата цифра също трябва да се дели на 3. Но тъй като осмата цифра е 6, останалите две цифри могат да са само 3 и 9. От друга страна, за да бъде изпълнено условието за числото, съставено от първите осем цифри да се дели на 8, трябва двуцифреното число, съставено от седмата и осмата цифра да се дали на 8. Това е възможно само ако седмата цифра е 9. Следователно за този случай останаха две възможности – 1472589630 или 7413589630. С непосредствена проверка се убеждаваме, че нито едно от числата 1472589 и 7412589 не се дели на 7. Следователно в този случай не се намира решение.

Да приемем втората възможност, когато е налице последователността 654. Тогава осмата цифра е 2, а за седмата поради делимостта на 8, ще имаме само две възможности 3 или 7. Ако седмата цифра е 3 ще имаме следните възможности 7896543210, 9876543210 , 1896543270 или 98165432370. Непосредствената проверка показва, че нито едно от съответните 7-цифрени числа не се дели на 7. Нека сега седмата цифра е 7. В този случай възможните числа са 1896547230, 9186547230, 1836547290 и 3816547290. Непосредствената проверка показва, че само за последното число, а именно 3816547290 е в сила условието за деление със 7.

Важното в решаването на задачата беше изборът на стратегиите, които динамично се променяха в резултат на изменящата се ситуация, която откритите междинни факти диктуваха. Стратегията на пълното изчерпване ще претърпи по-

нататък своите уточнения, обобщения и развитие. Основата на тези обобщения ще намерим в процесите на инференциалното търсене. Особено ценни приложения ще направим при решаването на задачи, в които се откриват обекти със доста непредсказуеми свойства или се доказва несъществуването на подобни обекти.

Разглеждане на случаи

Стратегията на пълното изчерпване постепенно прераства в стратегията “Разглеждане на случаи”. Както вече коментирахме, приемане истинността на някое предположение вкарва нови данни в условието и разширява областта от изходи. Обикновено нашите разсъждения имат двоичен характер. Като приемем, че нещо е вярно и получим някакъв извод, трябва да разгледаме, какво се получава, когато разглежданото нещо не е вярно. Последното също вкарва нова информация в задачата. В този случай си представяме задачата като нещо монолитно, но в нея се разкрива някаква пролука и разглеждането на случаите разцепва задачата на две, като се надяваме новите две задачи да са по-лесни от първоначалната.

Ще започнем с една задачата от знаменитите Санктпетербургски олимпиади.

Да се докаже, че цялото число $3a$ *може да се представи във вида* x^2+2y^2 *, т.е. като сбор на точен квадрат и удвоен точен квадрат (*x *и* y *са цели числа), ако числото* a *може да се представи по този начин.*

Ще приведем текста на официалното решение на журито, дадено в сборника “Санктпетербургски олимпиади”, където то е изложено кратко, но отникъде не се вижда ясно как решаващият ученик може да достигне до него.

“Разглеждаме тъждеството

$$a=\frac{3a}{3}=\frac{x^2+2y^2}{3}=\left(\frac{x\pm 2y}{3}\right)^2+2\left(\frac{x\mp 2y}{3}\right)^2 .$$

Ясно е, че числата x и y или се делят на 3, или не се делят на 3 (т.е. не е възможно само едно от тях да се дели на 3). Ако се делят на 3, твърдението е очевидно. Ако не се делят на 3 и при деление с 3 дават еднакви остатъци, вземаме горните знаци, а ако остатъците са различни – долните. Тогава числата в дробите ще са цели числа.”

Първото нещо, което се вижда е, че горното равенство въобще не е тъждество, защото в нито един от случаите т.н. смесени произведения не се унищожават. Кое е тъждеството, което са имали предвид авторите? То лесно може да бъде открито, като се използва методът на неопределените коефициенти, за който ще имаме възможност да прилагаме в голям диапазон от ситуации, т.е. той ще се прояви като полезна тактика за решаване на задачите. Без да се впускаме в подробности с помощта на този метод откриваме, че е допусната печатна грешка и търсеното тъждество вероятно е било $a=\frac{3a}{3}=\frac{x^2+2y^2}{3}=\left(\frac{x\pm 2y}{3}\right)^2+2\left(\frac{x\mp y}{3}\right)^2$. Сега може да се провери, че горното равенство е тъждество и решението е коректно.

В разгледаното по-горе решение, макар и не много силно подчертано присъства стратегията “Разглеждане на случаи”. Разглеждат се случаите, когато двете числа x и y се делят на 3 и когато не се делят на 3. В случая, когато тези числа не се делят на 3, се разглеждат случаите, когато те при деление с 3 дават еднакви остатъци или дават различни остатъци. Още веднъж виждаме схемата на метода. Приемаме, че е налице някакво предположение и след това разглеждаме случая, когато е налице неговото отрицание.

Да се върнем сега към задачата, защото горното решение беше резултат на тъждество, което е нетривиален факт и затова ще се опитаме да потърсим евристично решение. Дадено е, че числото

x^2+2y^2 се дели на 3, но тогава и числото $x^2-y^2=x^2+2y^2-3y^2$ ще се дели на 3. Идеята на горното преобразование е ясна. Сега можем да заключим, че 3 дели $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. Следователно или $x-y$, или $x+y$ се дели на 3, което не изключва възможността и двете да се делят на 3. Разглеждаме двата случая. Нека $x-y$ се дели на 3, т.е. $x=y+3u$ и тогава $3a=x^2+2(x+3u)^2=3x^2+12xu+18u^2$, откъдето $a=x^2+4xu+6u^2=x^2+4xu+4u^2+2u^2=(x+2u)^2+2u^2$. Случаят, когато $x+y$ се дели на 3 се разглежда аналогично на предишния.

Виждаме отново достойнствата на метода – всеки случай води до олекотяване на ситуацията и освен това натрупахме опит да четем критично упътванията и решенията. Понякога тези упътвания могат и да ни заблудят, но нали това е една от най-характерните черти на евристиката – да ни ориентира в сложна обстановка и да покаже идея за развитие на ситуацията.

Сега ще разгледаме едва красива задача от теория на числата. Тя е поучителна и със своята история.

Нека a и b са цели числа и n е естествено число. Да се докаже, че числото $\dfrac{b^{n-1}a(a+b)(a+2b)\ldots(a+(n-1)b)}{n!}$ *е цяло число.*

Тази задача е публикувана в “Списание на българското физико-математическо дружество” през 1935 г. от известния български математик Л. Чакалов. По-късно условието на задачата отново се появява на страниците на списанието. Причината за това е била, както пише самият автор на задачата, който по това време е бил и редактор на списанието, че поради известни проблеми, в частност

икономически, списанието спира да излиза. Чакалов повтаря някои от предложените задачи, които до този момент не са получили решения в редакцията от страна на читателите. След това второ предлагане решение на тази задача не е било публикувано. Да отбележим, че 45 години след публикуването на тази задача в Румъния е зададена следната задача, която е доста близка и бих казал доста частен случай на задачата на Чакалов.

Нека n е естествено число. Да се докаже, че произведението на n различни естествени числа, които образуват аритметична прогресия с разлика b, взаимно просто с $n!$, се дели на $n!$.

Решението на тази задача лесно следва по индукция. Ако приемем, че всяко произведение от $n-1$ последователни елементи на аритметичната прогресия, то като приемем индукционното предположение за $n-1$ ще имаме

$$(a+b)(a+2b)...(a+(n-1)b)(a+nb) \equiv a(a+b)...(a+(n-)b)(\bmod n!)$$

,защото $a+nb \equiv a(\bmod n)$. Остава да отбележим, че щом b и $n!$ са взаимно прости, то съществува естествено число k, такова че $a+kb$ се дели на $n!$. Понеже всички произведения на n елемента на разглежданата прогресия са сравними помежду си по модул $n!$ и поне едно от тях се дери на $n!$, твърдението следва.

Задачата на Чакалов изисква много повече от разгледаното по-горе. Тя прави впечатление с атрактивната си формулировка и напълно оправдава названието си „задача”. Имаме дадена ситуация, имаме цел, но пътят към достигане на тази цел е все още доста неясен.

За да се установи твърдението на задачата, трябва да се докаже, че знаменателят $n!$ дели числителя $b^{n-1}a(a+b)(a+2b)...(a+(n-1)b)$.

За целта ще разложим знаменателя в произведение на взаимно прости множители, като използваме формулата на Лагранж $n!=\prod_{p\le n}p^{\alpha_p}$, където p описва множеството на простите числа, не надминаващи n, $\alpha_p=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{p^i}\right]$, където $p^k\le n<p^{k+1}$. Тази формула може да се намери във всеки курс по Теория на числата, а и лесно може да се докаже. Понякога за удобство записваме формулата като безкрайна сума, а именно $\alpha_p=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$, защото всички събираеми след k-тото са равни на 0. За да се установи твърдението на задачата, трябва да докажем, че всяко от числата p^{α_p} е делител на числителя $b^{n-1}a(a+b)(a+2b)...(a+(n-1)b)$. Така редуцирана задачата изисква разглеждането на два случая – когато простото число p дели b и когато p не дели b.

I случай. Нека p дели b.

Тогава $\alpha_p=\alpha_p=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]\le\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^i}\right]<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{2^i}=n$. Следователно $\alpha_p\le n-1$, откъдето p^{α_p} дели множителя b^{n-1} от числителя.

II случай . Нека p не дели b.

Ще използваме факта, че ако m и n са взаимно прости цели числа, то измежду числата $a,a+n,a+2n,...,a+(m-1)n$ има число, кратно на m. (Това е така, защото тези числа образуват

пълна система от остатъци по модул m). Този факт е много полезен, но за него ще отделим време по-нататък. Оттук следва, че измежду числата $a, a+b, a+2b, ..., a+(p-1)b$ има такова, което се дели на p. Ще имаме още, че измежду числата $a+pb, a+(,+1)b, ..., a+(2p-1)b$ също ще има кратно на p и т.н. Следователно измежду числата $a, a+b, a+2b, ..., a+(n-1)b$ ще има поне $\left[\frac{n}{p}\right]$ на брой числа, които се делят на p. Аналогично установяваме, че измежду горните има поне $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ на брой числа, които се делят на p^2 и т.н. Следователно степента на простото число p в разлагането на числителя на прости множители е поне равна на α_p .

От изложеното решение се вижда как възникналите две задачи, доста различни според своя информационен носител, атакувани чрез различаваща се допълнителна информация , обединиха усилията си в окончателното решение. Определянето на случаите обикновено, както и в тази задача, е резултат от анализиране на условието.

Интересни примери за прилагане на стратегията “Разглеждане на случаи” се получават при съчетаване с други стратегии и тактики, например чрез използване на математическа индукция. На такива примери ще се спрем по-нататък.

Допускане на противното

При решаването на математическите задачи разграничаваме две основни дейности – изследователска и доказателствена. В изследователската част решаващият приема, че задачата е решена и прилага различни комбинации от планове (стратегии), които подготвят преминаването от изследване към аргументация. Понякога при тази изследователска част се прибягва към разбиване на задачата на по-малки цели, разглеждане на случаи и т.н. Всяка от тези дейности се нуждае от съответните методи на доказателство. Основата на тези методи е правилното и целенасочено мислене в областта на задачата. Колкото е по-сложно едно доказателство, толкова е по-трудно го откриваме и установяваме, че то е коректно. Какво съдържание влагаме в понятието "доказателство"? Доказателството – това е система от разсъждения, която цели да убеди, този който я е възприел по такъв начин, че той да може да убеди себе си и другите с помощта на същите разсъждения. В математиката приемаме три стила на доказателство – пряко доказателство, непряко доказателство и математическа индукция. Прякото доказателство, наричано още дедукция, няма нищо общо с Шерлок Холмс. Дедуктивните аргументи следват схемата "ако p, то q", предложен още от Аристотел. "Всички хора са смъртни. Сократ е човек. Следователно Сократ е смъртен."

Методът на пробите и грешките е типичен пример за пряко аргументиране. Да разгледаме следната задача.

Дадени са 9 еднакви на вид монети, такива че 8 от тях са с едни и същи тегла, а едната е малко по-лека от тях. Да се докаже, че с помощта на две претегляния на балансираща везна без теглилки може да се отдели най-леката от останалите.

Разделяме деветте монети по произволен начин на три групи от по три монети. Поставяме на едното блюдо на везната едната група, на другото – друга група, а третата оставяме настрана. Възможни са два случая: везната е в равновесие, което показва, че леката монета е в третата група, или везната не е в равновесие, което показва, че леката монета е в групата, която е на везната и е по-лека от другата По такъв начин определяме в коя от трите групи от по три монети се намира леката. С тази група постъпваме аналогично. Върху везната поставяме двете монети – по една на всяко блюдо, а третата оставяме настрана. Отново са възможни два случая: везната е в равновесие, което показва, че леката монета е тази, която не е на везната, или везната не е в равновесие, откъдето намираме леката монета.

Понякога при прилагането на пряката аргументация първоначалната ситуация не е в състояние да ни поднесе такава определена поредица от разсъждения. Тогава прилагаме непрекия стил на аргументация, популярен като метод на допускане на противното. Към този метод прибягваме, когато методът на пряката аргументация е безсилен. Но ако една задача допуска решение с пряко аргументиране, ще предпочетем него, пред метода на допускане на противното. Методът на допускане на противното по същество е вариант на стратегията “Разглеждане на случаи”. При него решаващият приема, че твърдението, което трябва да се докаже не е вярно и се стреми да достигне до нещо, което е невъзможно.

Защо оприличаваме този метод със стратегията “Разглеждане на случаи”? Защото и при двете стратегии добавяме допълнителна информация към условието, т.е. увеличаваме областта от възможните изходи на задачата. Когато достигнем до невъзможна ситуация, казваме, че сме получили противоречие – това означава, че твърдението е доказано. Да разгледаме някои класически приложения на този метод. В учебника за 7 клас се доказва, че в произволен триъгълник срещу по-голяма страна лежи по-голям ъгъл. Вярно е и обратното твърдение – срещу по-голяма ъгъл в един триъгълник лежи по-голяма страна. Твърдението може да се докаже и чрез пряка аргументация, но тук за предпочитане е да използваме допускане на противното, защото доказателството става много по-ясно. Нека ABC е триъгълник, за който $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. Трябва да се докаже, че $BC > AC$. Допускаме, че последното не е вярно, т.е. вярно е $BC \leq AC$. Това означава, че $BC = AC$ или $BC < AC$. Ако е налице равенството, триъгълникът ABC е равнобедрен и $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. Ако $BC < AC$, от цитираната теорема следва, че $\sphericalangle A < \sphericalangle B$. Но и двата извода противоречат на даденото условие. Следователно направеното допускане не е вярно. Разгледаният пример може да се намери в знаменитите ”Начала” на Евклид, написани преди около 4000 г. При нас е достигнало още едно знаменито доказателство от това време.

Простите числа са безбройно много (Евклид).

Да напомним – прости са тези естествени числа, които освен на 1 и себе си нямат други естествени делители, като числото 1 не се счита за просто. Да проследим доказателството на горния факт, направено толкова отдавна. Допускаме, че твърдението не е вярно, т.е. съществуват само краен брой прости числа. Тогава можем да

направим списък на всичките тези числа. Нека те са $p_1, p_2, ..., p_n$. Разглеждаме числото $N = p_1 p_2 ... p_n + 1$. Последното не се дели на нито едно от простите числа $p_1, p_2, ..., p_n$. Това противоречи на факта, че всяко естествено число, по-голямо от 1, има поне един прост делител. Тази изключително красива и ползотворна схема срещаме в решения на много задачи и в доказателства на много теореми. Ето една модификация на теоремата на Евклид.

Простите числа, които при деление на 4 дават остатък 3, са безбройно много.

Като изключим числото 2, всичките останали прости числа са нечетни. Те от своя страна се разделят на две групи – такива, които при деление на 4 дават остатък 1 и такива, които при деление с 4 дават остатък 3. Първите ще записваме с общата формула $4k+1$, а останалите - $4k+3$. За последните ще използваме записа $4k-1$, който е по-удобен. Ще отбележим следното свойство на числата от вида $4k+1$, че произведение на краен брой числа от този вид е също число от този вид, нещо което се проверява непосредствено. Сега ще докажем, че простите числа от вида $4k-1$ са безбройно много. Допускаме, че те са краен брой и нека $p_1, p_2, ..., p_n$ е списъкът на всички такива числа (работим по Евклид). Разглеждаме числото $N = 4p_1 p_2 ... p_n - 1$. Това число е от вида $4k-1$. То притежава поне един прост делител от вида $4k-1$. За да докажем последното, отново допускаме противното, т.е. всички прости делители на $N = 4p_1 p_2 ... p_n - 1$ са от вида $4k+1$. Последното противоречи на цитираното по-горе свойство, че произведения на числа от вида $4k+1$ са числа от същия вид.

Методът на допускане на противното е бил много популярен още в древна Гърция. Освен Евклид и друг известен математик се е обръщал към него. Ето пример от неговото творчество.

Числото $\sqrt{2}$ е ирационално. (Питагор)

Какво е $\sqrt{2}$ и какво означава, че това число е ирационално? Положителното число r, за което $r^2 = 2$ се нарича $\sqrt{2}$. Едно реално число се нарича ирационално, ако то не е рационално. Рационално е всяко реално число, което може да се представи като отношение на две цели числа. За да докажем твърдението на Питагор, ще допуснем противното, т.е. $\sqrt{2}$ е рационално. Последното означава, че то се представя като частно на две цели числа m и n, т.е. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Без ограничение можем да считаме, че дробта $\frac{m}{n}$ е несъкратима, т.е. числата m и n нямат общ делител, по-голям от 1. От равенството $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ следва $2n^2 = m^2$. От последното равенство се вижда, че числото m^2 е четно. Но ако квадратът на едно цяло число е четно, то и самото число е четно, т.е. $m = 2k$. Сега заместваме m и съкращаваме на 2. Получаваме $n^2 = 2k^2$. С подобни аргументи заключаваме, че и числото n е четно. Получихме, че и двете числа m и n са четни, което е противоречие, защото приехме, че те нямат общ делител, по-голям от 1.

Разгледаните примери показват на каква огромна популярност се радва стратегията на допускане на противното. С нейна помощ математиката става много по-интересна и привлекателна. До сега имахме и други възможности да се срещаме с косвените

доказателства. Например задачите, в които доказваме несъществуване на обект с определени свойства, се решават с допускане на противното.

Да се докаже, че уравнението $x^2+x+1=y^2$ *няма решение в множеството на естествените числа.*

Ще доказваме чрез метода на допускане на противното, т.е. ще приемем, че има естествени числа x и y, такива че $x^2+x+1=y^2$. Ясно е, че $x<y$, а тъй като x и y са естествени числа, то $x+1\le y$. От друга страна от $y^2=x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2$ следва, че $y<x+1$. Получихме противоречие, което доказва твърдението.

С интересни приложения на стратегията на допускането на противното се срещаме в задачи от теория на числата при използване на тактиката, наречена модулна аритметика.

Да се докаже, че уравнението $x^2-2y^2+8z=3$ *няма решения в множеството на целите числа.*

От вида на поставената задача можем да се досетим, че трябва да се използва модулна аритметика, но въпросът е с какъв модул. Отговорът на този въпрос ще ни даде познаването на свойствата на числата. Нека първо приемем, че твърдението не е вярно, т.е. има цели числа x_0, y_0, z_0, за които $x_0{}^2-2y_0{}^2+8z_0=3$. Ще продължим със стратегията разглеждане на случаи. Ако x_0 е четно число, лявата страна на равенството ще бъде също четно и не може да е равна на 3. Ако x_0 е нечетно, прилагаме свойството на квадратите на нечетните числа, според което последните дават остатък 1 при деление с 8. Ясно е , че това е търсеният модул. Наистина от $x_0{}^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$ следва, че $1-2y_0{}^2\equiv 3(\mathrm{mod}\,8)$ или $-y_0{}^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$. Последното е невъзможно,

отново заради свойството на квадрата на нечетното число y_0^2. Остатъкът на последното число при деление трябва да е 1.

Методът на допускане на противното се използва не само за доказване на невъзможни ситуации, но и за получаване на положителни резултати.

Нека p_1, p_2, q_1, q_2 *са реални числа, такива че* $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$. *Да се докаже, че поне едно от уравненията* $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ *и* $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ *има реални корени.*

Думата "поне" от условието на задачата е една трудна математическа дума. В нашия случай тя означава три различни изхода – първото уравнение да има реални корени, а второто да няма, или второто уравнение да има реални корени, а първото да няма, или и двете уравнения да имат реални корени. Ако към всички това добавим и случаите, при които някое от уравнението има само един реален корен, многообразието от изходи трудно може да бъде проследено. Затова прибягваме към допускане на противното. Сега имаме единствена възможност – и двете уравнения нямат реални корени. Следователно дискриминантите на двете уравнения са отрицателни, т.е. $p_1^2 - 4q_1 < 0$ и $p_2^2 - 4q_2 < 0$. Събираме тези две еднопосочни неравенства и получаваме $p_1^2 + p_2^2 - 4q_1 - 4q_2 < 0$. Сега заместваме от условието $4(q_1 + q_2)$ с $2p_1 p_2$ и получаваме $p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 < 0$ или $(p_1 - p_2)^2 < 0$, което е противоречие.

Ще приложим още веднъж метода на допускане на противното.

От точка O *в равнината излизат 19 лъчи. Всеки два съседни лъча образуват ъгъл, който се измерва с цяло число градуси.*

Да се докаже, че ако всичките такива ъгли са два по два различни, поне един от тях се измерва с четен брой градуси.

Да означим с $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{19}$ ъглите, образувани от дадените двойки съседни лъчи. Тъй като по условие тези ъгли са различни, без ограничение можем да приемем, че $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{19}$. Да допуснем противното, т.е. всяко от числата $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{19}$ е нечетно. Тогава $\alpha_1 \geq 1°$, $\alpha_2 \geq 3°, ...,$ $\alpha_{19} \geq 2.19 - 1 = 37°$. Събираме почленно горните неравенства и получаваме

$$360° = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{19} \geq 1° + 3° + ... + 37° = 361°,$$

което е противоречие. Следователно поне един от разглежданите ъгли се измерва с четно число градуси.

Сега ще разгледаме една забавна задача.

Двама шахматисти решили да се забавляват като играят шахматна партия по следните правила: фигурите се движат, както в нормалния шах, но всеки от играчите последователно играе един или два хода. Да се докаже, че при тези правила играчът, който прави първи ход има негубеща стратегия.

Обикновено в шахмата първи ход имат белите фигури. Ще решим задачата чрез допускане на противното, т.е. ще приемем, че както и да стартират белите, черните могат да играят по такъв начин, че да постигнат победа. Ако обаче белите изиграят в началото ходовете: Kb1-c3 и Kc3-b1, на дъската не е настъпила промяна. Сега черните трябва да играят по същество първи ход, а белите ще имат негубеща стратегия според допускането. Полученото противоречие доказва твърдението на задачата.

Допускането на противното се използва при доказателство на редица теореми. Ще продължим с един пример на румънския математика Йон Томеску, който наистина звучи като теорема.

Нека $F=\{E_1,E_2,...,E_n\}$ *е фамилия от подмножества с по* r *елемента от дадено множество* X *. Да се докаже, че ако сеченията на всеки набор от* $r+1$ *на брой (не непременно различни) подмножества от* F *е непразно, то сечението на всички подмножества от* F *е също непразно.*

Допускаме противното, т.е. $\bigcap_{i=1}^{s} E_i=\varnothing$. Нека $E_1=\{x_1,x_2,...,x_r\}$.

Понеже нито един от елементите x_i не лежи в $\bigcap_{i=1}^{s} E_i$, следва, че за всяко $i=1,2,...,r$ съществува подмножество E_{j_i}, такова че x_i не принадлежи на E_{j_i}. Тогава $E_1\bigcap E_{j_1}\bigcap...\bigcap E_{j_r}=\varnothing$, защото нито един от елементите на E_1 не може да принадлежи на тома сечение. Получихме противоречие с допускането. Следователно твърдението е вярно.

Да повторим още веднъж – приемането на отрицанието на твърдението за вярно фактически добавя към съществуващата в условието информация. Затова на въпроса струва ли си да добавим към условието на задачата нейното отрицание, отговорът може да е само един – задачата има шанс да бъде решена, но може и да не бъде решена. Все пак, методът на допускане на противното, както всяка евристична стратегия, може да помогне. Ако не се прави нищо по решението на задачата, сигурно, няма да се постигне положителен резултат. Големият брой примери на задачи и теореми, които се решават по този метод е основание да го имаме предвид в по-

нататъшната работа със задачите. Ако изпитвате затруднения при намирането на решението на някоя задача, допуснете противното. Може да не спечелите, но няма да загубите.

Допускане на противното в геометрията. Теорема на Щайнер-Лемус

Ако искаме да се потопим по-дълбоко в изучаването на математиката, разбира се, ще се нуждаем от по-задълбочени познания по алгебра, аритметика и математически анализ, но по никакъв начин не бива да подценяваме и геометрията, в която множество полузабравени моменти представляват истинска съкровищница от интелектуални предизвикателства, на които днес забързаното младо поколение няма време да се наслади. Така приблизително преди повече от половин век крупният специалист в областта на математическото образование Е.Т. Бел (Bell) изразява своето отношение към обучението по математика в своето време. (Звучи доста съвременно, нали?!). За един подобен момент ще стане дума в тази статия.

Примерите, с които илюстрирахме метода на допускане на противното бяха от най-разнообразни области на математиката – алгебра, теория на числата, комбинаторика. Големи приложения този метод намира при доказателствата на теоремите в геометрията и при решаване на задачи от геометрията. Особено ценен е методът на допускане на противното при намиране и доказване на теореми, които са необходими и достатъчни условия. Такава теорема беше разгледана в предишното четиво. За произволен триъгълник ABC необходимо и достатъчно условие $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$ е $BC > AC$. Последното изказваме по следния начин: „За произволен триъгълник $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$ тогава и само тогава, когато $BC > AC$.” Ще разгледаме една популярна теорема.

Нека точките M, N, P лежат върху страните BC, CA, AB съответно на триъгълника ABC. Перпендикулярите, издигнати от M, N, P съответно към BC, CA, AB се пресичат в една точка тогава и само тогава, когато $MB^2 - MC^2 + NC^2 - NA^3 + PA^2 - PB^2 = 0$.(Теорема на Карно).

Нека трите перпендикуляра се пресичат в една точка O. Сега прилагаме питагоровата теорема за триъгълниците $OBM, OCM, OCN,$, OAN, OAP, OBP като изразим квадратите на отсечките MB, MC, NC, NA, PA, PB и заместим в условието. Обратно, нека е налице дадената релация. Трябва да се докаже, че трите перпендикуляри минават през една точка. Допускаме противното. За определеност, нека перпендикулярите от точките M и N, издигнати съответно към BC и AC се пресичат в точката O, но перпендикулярът от точката P, издигнат към AB не минава през O. Означаваме с Q петата на перпендикуляра от O към AB. Ясно е, че $Q \neq P$. От доказаното по- горе необходимо условие, имаме

$$MB^2 - MC^2 + NC^2 - NA^3 + QA^2 - QB^2 = 0 \ ,$$

откъдето $PA^2 - PB^2 = QA^2 - QB^2$. Тъй като $PA + PB = QA + QB = AB$, то $PA - PB = QA - QB$.

Тогава $PA - (AB - PA) = QA - (AB - QA)$, откъдето $PA = QA$, което е противоречие.

Сега ще разгледаме една знаменита теорема. Поради нейната важност и възможностите да прилагаме метода на допускане на противното ще изложим няколко доказателства. Във всяко от тях ще използваме косвено доказателство, а различията ще са за сметка на математическия апарат, който се използва в тях.

Известни са много най-разнообразни твърдения за най-простата (?) геометрична фигура – триъгълника. Едни от най-интересните негови атрибути са ъглополовящите. За това и нашият интерес естествено ще се насочи към теоремата на Щайнер - Лемус, която в продължение на повече от сто години се счита за индикатор в овладяване на геометричните умения. Ще видим сега, че тя вече е достъпна за различни групи от ученици.

Съществуват множество интересни геометрични задачи, които са вълнували представителите на математическата общност в близкото минало. Да си припомним трите знаменити задачи на древността – удвояване на куба, трисектрисата на ъгъла и квадратурата на кръга. Опитите да се решат тези задачи дават мощен тласък в развитието на математическите идеи и в разкриване на нови дялове в математиката. Една от тези, много популярни в миналото задачи, е и теоремата, която се формулира толкова естествено и достъпно.

Ако в един триъгълник две от ъглополовящите му имат равни дължини, този триъгълник е равнобедрен.(*Теорема на Щайнер – Лемус).*

Преди да обсъдим доказателството на теоремата, ще стартираме с малко история. Това е история, която звучи доста интересно, достоверно и най-важното правдоподобно. Според литературни източници, теоремата е формулирана за пръв път през 1840 г. от берлинския математик К.А. Лемус (Lehmus), който към този момент не разполагал със собствено доказателство и за това чрез писмо се обърнал към известния по това време швейцарски геометър Якоб Щайнер (Steiner) за откриване на подходящо доказателство. Отговорът на Щайнер, достигнал обратно през 1844

г., е бил едно доста комплицирано доказателство, изпълнено с редица тежки аналитични пресмятания. През 1948 г. отново Щайнер дава чисто геометрично доказателство, а през 1850 г. самият Лемус намира свое, различно от това на Щайнер, също геометрично доказателство.

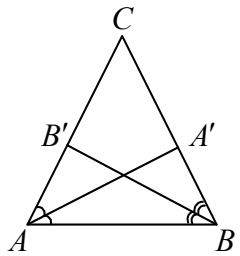
Отново интересът към теоремата на Щайнер – Лемус предизвиква известният популяризатор на математиката Мартин Гарднър (Gardiner), който на страниците на изключително популярното списание Scientific American описва историята около появата на теоремата на Щайнер - Лемус по такъв интересен начин, че в редакцията заваляло от писма с предложения с нови доказателства. Самият Гарднър се заел да систематизира този поток от писма, за да можело да се отсеят тези настина цени идеи от писмата на читателите. Общото настроение, обаче, в повечето писма се е създало от факта, че във всички доказателства се е прилагал така нареченият метод на изключеното трето или популярен под името Reductio ad absurdum (Допускане на противното) . Имало е и такива доказателства, които видимо не изисквали допускане на противното, но при по-внимателно прочитане се установявало, че все пак този метод е някак си в скрита форма използван или пък твърдението се е основавало на други твърдения, които използват в своите доказателства допускане на противното. В това, разбира се, няма нищо лошо и затова тук си поставихме за цел да обърнем отново внимание на този красив и ефикасен метод.

Сега ще изложим част от известните доказателства на тази теорема. Средствата, които ще използваме са най-разнообразни и са предназначени за ученици от различни класове и възможности да прилагат придобитите знания в клас. Затова в духа на теорията за

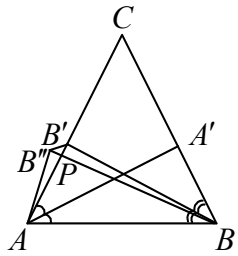
решаване на задачи (Problem Solving) е по-правилно да наричаме теоремата на Щайнер – Лемус задача на Щайнер – Лемус. От типа на разсъжденията, които ще проведем, читателят сам ще разбере кое от решенията на задачата към каква група учащи се ще е насочено - дали към седмокласници, които току що са се запознали с основните геометрични фигури, като триъгълник, успоредник и др., дали към осмокласниците, които вече познават свойствата на окръжността, дали към деветокласниците, владеещи някои елементи на метричната геометрия или към десетокласниците, които владеят основите на тригонометрията. И така, още с най-началните запознанства с геометрията учениците доказват, че в равнобедрен триъгълник ъглополовящите на раните ъгли имат лавни дължини. В сила е и обратното.

Даден е триъгълник ABC, в който AA' и BB' са негови вътрешни ъглополовящи $\left(A' \in BC, B' \in AC\right)$ и $AA' = BB'$. Да се докаже, че триъгълникът ABC е равнобедрен.

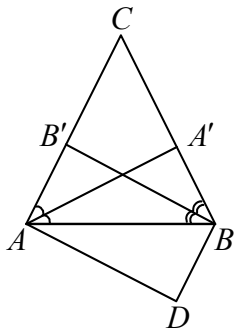
Доказателство 1. Допускаме противното и без ограничение на общността можем да приемем, че $\alpha = \sphericalangle BAC < \sphericalangle ABC = \beta$. От триъгълниците ABA' и BAB' ще установим, че $BA' < AB'$. За целта построяваме $\triangle ABA'' \cong \triangle BAA'$ и нека $P = AC \cap BA''$.



Очевидно $BP < BB'$ и следователно точката A'' е външна за триъгълника ABC. От това, че триъгълникът $B'BA''$ е равнобедрен, следва, че $AA'' < AB'$ $\left(\sphericalangle AB'A'' < \sphericalangle B'A''B < \sphericalangle B'A''A\right)$ и понеже $BA'' = AA'$, то $BA' < AB'$. Сега построяваме през A права, успоредна на BB' и през B – права, успоредна на AC и с D

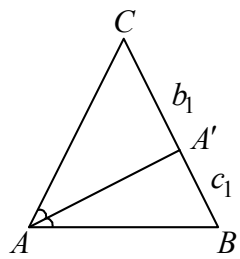


означаваме пресечната им точка. Очевидно $ADBB'$ е успоредник и $AB' = BD$, откъдето $A'B < BD$. От триъгълника $A'DB$ следва, че $\sphericalangle A'DB < \sphericalangle DA'B$ и тъй като $AD = BB' = AA'$, то $\sphericalangle ADA' = \sphericalangle AA'D$, т.е. $\sphericalangle ADB < \sphericalangle AA'B$. Понеже $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AB'B$, то $\sphericalangle AB'B < AA'B$, т.е. $180° - \alpha - \frac{1}{2}\beta < 180° - \beta - \frac{1}{2}\alpha$.



Следователно $\beta < \alpha$, което противоречи на допускането. По такъв начин получихме, че $\alpha = \beta$ и триъгълникът ABC е равнобедрен.

Доказателство 2. Ще използваме известната формула $l_a^{\,2} = bc - b_1c_1$, в която $b_1 = \frac{ab}{b+c}$ и $c_1 = \frac{ac}{b+c}$. Тези формули могат да се намерят във всеки справочник по математика. Чрез тях достигаме до следния вид на формулата за ъглополовящата



$$l_a^{\,2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2 - a^2\right).$$

От приравняването на двете формули за l_a и l_b получаваме

$$\frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2 - a^2\right) = \frac{ac}{(a+c)^2}\left((a+c)^2 - b^2\right),$$

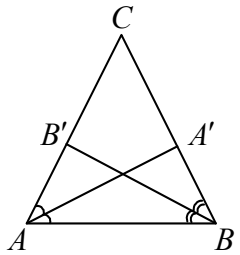
откъдето

$$b(a+c)^2\left((b+c)^2 - a^2\right) = a(b+c)^2\left((a+c)^2 - b^2\right)$$

или след разкриване на скобите

$$(b-a)(a+c)^2(b+c)^2 = ab\left(a(a+c)^2 - b(b+c)^2\right).$$

Но $a(a+c)^2 - b(b+c)^2 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2+2c(a+b)+c^2\right)$. Ако допуснем, че $a \neq b$, ще получим, че лявата и дясната част на полученото равенство са с различни знаци. Това доказателство може да се проведе и ако се използва друг вид на формулата за ъглополовящата, например $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\gamma}{2}$, която лесно се получава със съображения за лица. Това подсказва и следващото доказателство.



Доказателство 3. Отново ще използваме стандартните означения за триъгълник, като положим $l_a = l_b = l$.

Имаме

$$S_{ABA'} = \frac{1}{2}cl\sin\frac{\alpha}{2},\ S_{AA'C} = \frac{1}{2}bl\sin\frac{\alpha}{2},\ S_{ABB'} = \frac{1}{2}cl\sin\frac{\beta}{2},\ S_{BB'C} = \frac{1}{2}al\sin\frac{\beta}{2}.$$

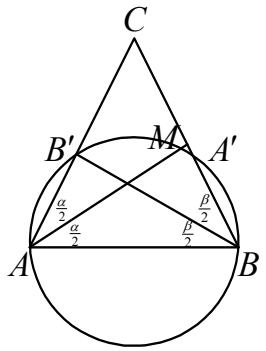
От $S_{ABC} = S_{ABA'} + S_{AA'C} = S_{ABB'} + S_{BB'C}$ следва $(b+c)\sin\frac{\alpha}{2} = (a+c)\sin\frac{\beta}{2}$.

След прилагане на синусовата теорема получаваме, откъдето

$$\sin\gamma\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right) = \sin\alpha\sin\frac{\beta}{2} - \sin\beta\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right).$$

Като използваме, че функцията $\sin x$ е растяща, а $\cos x$ е намаляваща в първи квадрант и допуснем противното, т.е. например ако $\alpha < \beta$,, то ще имаме $\sin\frac{\alpha}{2} < \sin\frac{\beta}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2} > \cos\frac{\beta}{2}$. Понеже $\sin\gamma > 0, \sin\frac{\alpha}{2} > 0$ и $\sin\frac{\beta}{2} > 0$, ще получим противоречие, както в Доказателство 2.



Доказателство 4. Отново ще приемем за определеност, че $\alpha < \beta$. Нека M е точка от AA', такава че $\sphericalangle B'BM = \frac{\alpha}{2}$. Тъй като отсечката $B'M$ се вижда от точките A и B под един и същ ъгъл, то A, B, M и B' лежат на една окръжност. Да напомним, че в окръжност срещу по-малки вписани остри ъгли лежат по-късите хорди. Понеже $\alpha < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \sphericalangle ABM$, то $BB' < AM < AA'$, което е в противоречие с условието $AA' = BB'$.

В последното доказателство, както и в Доказателство 1, се възползвахме от съображението, че всяко твърдение е еквивалентно с противоположното на обратното, т.е. вместо да доказваме, че "от p следва q" доказваме, че от "не q следва не p". Това остроумно доказателство на теоремата на Лемус – Щайнер е дадено от двама английски непрофесионални математици, доколкото е известно – инженери, Г. Джилбърт (G.Gilbert) и Д. МакДонел (D. McMacdonnel), в отговор на публикациите на Мартин Гарднър.

Ще добавим още, че разгледаните в статията разнообразни подходи към доказателството на теоремата на Щайнер – Лемус още веднъж ще ни убедят в ефикасността на метода на допускане на противното (Reductio ad absurdum). В тази връзка си струва да напомним мнението на брилянтния английски математик Годфри Харолд Харди, който в своята "Апология на математика" пише:
"Reductio ad absurdum - толкова любим метод, прилаган още по времето на Евклид и Питагор, е изключително изящен инструмент в ръцете на математика. Той представлява много по-съвършен гамбит,

какъвто шахматистите правят, жертвайки пешка или фигура, за да спечелят дадена партия, а математикът жертва цялата партия”.

Принцип на математическата индукция

Най-важната част от решението на една задача по математика е обосновката на решението. Решаването на всяка задача се състои преди всичко от доказателство. Затова винаги обръщаме внимание на начина на аргументиране на отделните твърдения. Съществуват три стила на аргументиране – праволинейна дедукция, известен като пряко доказателство, допускане на противното – косвена дедукция и математическата индукция. Досега разгледахме множество приложения на първите два стила, а сега ще съсредоточим нашето внимание към третия.

Стилът на аргументация, наречен дедукция, пряка или косвена, е прилаган още от Аристотел. При него заключенията се извеждат от верността на общовалидни наблюдения. Индукцията, обратно, строи своите изводи на базата на емпирична информация, чрез която се създават хипотези, но тези хипотези не са резултат на логически следствия от тази информация. Дедукцията се осъществява чрез средствата на логическото мислене от общото към частното, докато индукцията прави това в обратната посока – от частното към общото. По такъв начин, индукцията е доста неясен и нелогичен процес, чрез който се правят заключения. Но той е незаменим в изследователската работа, даже и в най-строгата научна дисциплина – математиката. Ние доказваме теоремите чрез дедукция, но ги откриваме чрез индукция. Наблюденията и експериментите имат място в изследванията по математика, така както във физиката и химията, но с тази разлика, че апаратът за тези изследвания (листи и писалки) е доста по-евтин, макар че напоследък и математиците се нуждаят за

своите изследвания от мощни и скъпи компютри. Все пак различието между математиката и експерименталните науки е, че в математиката изследователят дава строга аргументация на откритите факти, а не се осланя само на индукцията.

Математическата индукция е особен метод за аргументация. Тя не може да ни служи да откриване и по тази причина въобще не е редно да се нарича индукция, но е метод за извършване на прецизни обосновки в някои специални случаи. Тя намира приложение във всеки клон на математиката. Математическата индукция характеризира структурата на множеството на естествените числа. С помощта на математическата индукция се доказват твърдения, които са в сила за всеки елемент или почти всеки елемент на множеството на естествените числа, като:

Сборът на първите n естествени числа е $\frac{n(n+1)}{2}$, *т.е.* $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Сборът от квадратите на първите n естествени числа е $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *т.е.* $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Сборът от мерките на вътрешните в произволен изпъкнал многоъгълник е равен на $(n-2)180°$. *(Тук* $n \geq 3$*)*

Неравенството $n! > 2^n$ *е вярно за всяко естествено число* $n \geq 4$.

Всяко от тях има вида "$P(n)$ е вярно за всяко естествено число $n \geq n_0$, където $P(n)$ е твърдение, което се отнася до естественото число n, а n_0 е началната позиция от която твърдението става вярно."

Методът на математическата индукция се основава на принципа (аксиомата) на математическата индукция.

Ако твърдението $P(n)$:

(1) е вярно за $n = n_0$;

(2) от предположението, че $P(n)$ е вярно за някое естествено число $n = k \geq n_0$, следва верността му за следващото естествено число , $n = k + 1$, то $P(n)$ е вярна за всяко естествено число $n \geq n_0$.

Следователно математическата индукция се характеризира със следните дейности.

(1) Установяване на верността на твърдението $P(n_0)$. Това се нарича "базисна стъпка" или основа на индукцията. Тя се проверява лесно, но всяко правило си има изключения! Най-често $n_0 = 1$.

(2) Приемаме, че $P(n)$ е вярно твърдение за някое естествено $n \geq n_0$. Това се нарича "индуктивна хипотеза" или "индуктивно предположение". След това показваме, че от предположението следва, че $P(n+1)$ е също вярно.

Това е достатъчно да твърдим, че $P(n)$ е вярно за всяко $n \geq n_0$. Това е така, защото от факта, че $P(n_0)$ е вярно според (1), следва, че $P(n_0 + 1)$ е вярно според (2), а сега отново според (2) ще е вярно $P(n_0 + 2) = P((n_0 + 1) + 1)$ и т.н. Именно това неясно и съмнително от математическа гледна точка "... и т.н." ни го спестява математическата индукция.

Ето една класическа илюстрация. Представете си, че сте наредили едно след друго безбройно много плочки от домино (тези плочки отговарят на $P(1)$, $P(2)$,...). Ако чукнем първото домино, то падайки ще закачи второто и ще предизвика от своя страна неговото падане, падането на второто ще предизвика падането на следващото... Падането на първото домино е все едно установяването на базисната стъпка, след което индукцията започва да "работи". Показвайки, че падането на някоя плочка събаря следващата е все едно установяването на верността на $P(n)$ след като сме приели, че е вярно $P(n)$. Затова често сравняваме математическата индукция с т.н. "ефект на доминото".

Обърнете вниманието на фразата "индукцията работи". И тя наистина работи вместо нас. Важното е да се разбере, че думите и символите, характеризиращи математическата индукция, включват **безбройно много твърдения** – по едно за всяко естествено число. Да докажем безбройно много твърдения ние просто не можем да направим. Доказателството чрез математическата индукция е едно чудодейно средство да се преодолее тази безнадеждна задача – доказване на твърдението за всяко естествено число поотделно, което очевидно е невъзможно.

Някои от читателите вероятно изпитват затруднения от сложността на аксиомата на математическата индукция – те не я усещат като нещо очевидно, а обикновено за аксиоми в училище се избират твърдение, верността на които не буди съмнение. Затова ще превърнем тази аксиома в теорема, която ще докажем чрез друга аксиома, която изглежда по-очевидно.

Аксиома за най-малкия елемент – всяка непразно подмножество на множеството на естествените числа има най-малък елемент.

Известно е, че множеството на естествените числа притежава най-малък елемент – това е числото 1. Аксиомата за най-малкия елемент твърди, че всяко множество от естествени числа има най-малък елемент.

Теорема за принципа на математическата индукция.

Ако твърдението $P(n)$ е вярно при $n = n_0$ и от предположението, че $P(n)$ е вярно за някое естествено $n \geq n_0$ следва, че $P(n+1)$ е вярно, то $P(n)$ е вярно за всяко естествено $n \geq n_0$.

Доказателство. Ще използваме метода на допускане на противното. Тъй като трябва де се докаже, че $P(n)$е вярно за всяко естествено $n \geq n_0$. като допуснем противното, т.е. не е вярно твърдението, следва, че $P(n)$ не е вярно за поне едно естествено число $n \geq n_0$. Следователно съществува непразно множество от естествените числа , за които $P(n)$ не е вярно и според аксиомата в него ще съществува най-малък елемент, който ще означим с m. Тъй като $P(n_0)$ е вярно по условие, то $m > n_0$. Тогава за числото $m-1$, числото предшестващо m, твърдението $P(m-1)$ е вярно. Но от условието следва, че от верността на $P(m-1)$ следва, че и $P(m)$ е вярно. Получихме, че $P(m)$ е едновременно вярно и невярно, което е невъзможно.

Принципът на математическата индукция е в основата на теорията на естествените числа. Като всяка теория и тази зависи от системата аксиоми, които я въвеждат. Така, че не бива да се учудваме, че принципът на математическата индукция в една система е аксиома, в друга теорема или даже има такава система от аксиоми, в които той се оказва определение.

След като въведохме принципа на математическата индукция, сега ще направим някои по-интересни приложения.

В равнината са начертани няколко прави и окръжности. Да се докаже, че частите, на които равнината се разделя, могат да се оцветят в два цвята, така че съседните части (тези които имат обща граница – отсечка или дъга от окръжност) да са оцветени в различни цветове.

Твърдението на задачата не е свързано пряко с множеството на естествените числа. Обаче в процеса на ориентацията, когато експериментираме и разглеждаме частни случаи, естествено стартираме с една линия, след това с две линии и т.н., така че естественият аргумент в задачата, по който ще се води индукцията е броят на участващите линии – прави и окръжности. С други думи, ще доказваме твърдението $P(n)$: “Ако равнината е разделена с помощта на n линии, можем да оцветим получените области с два цвята, така че съседните области да оцветени в различни цветове.”Очевидно $P(1)$ е вярно. Да предположим, че е вярно $P(n)$.Областите, на които е разделена равнината от n-те линии, са оцветени в шахматен ред. (Индукцията е работила за нас). Прекарваме една нова линия. Ако тя е права, преоцветяваме в противоположен цвят всички части, които са разположени от едната страна на правата, а цветът на частите от

другата страна не променяме. Ако добавената линия е окръжност, преоцветяваме частите във вътрешността на кръга, а външните части не променяме. По такъв начин всяка област, ограничена от построените линии, е оцветена в един от двата цвята и всеки две съседни области са оцветени в различен цвят.

Понякога за доказване на някое твърдение се нуждаем не само от верността на определено $P(n)$, за да установим $P(n+1)$, а от верността на всичките $P(n_0)$, $P(n_0+1)$,..., $P(n)$.Този вариант на индукцията е еквивалентен на стандартната индукция и се нарича силна индукция. Ще разгледаме пример на силна индукция.

Разбиване на едно множество наричаме представянето му в обединение на непресичащи се негови подмножества. Едно разбиване на многоъгълник се нарича **триангулация** ако е разбиване на триъгълници и върховете на всеки триангулиращ триъгълник са върхове на многоъгълника. Един многоъгълник може да има повече от една триангулация. Два върха на многоъгълника наричаме **съседни**, ако те са върхове на някой от триангулиращите триъгълници. Поставяме си задачата да оцветим върховете на всички триангулиращи триъгълници, така че никои два съседни върха да не са оцветени в един и същ цвят. Очевидно цветовете трябва да са поне три. Оказва се, че три цвята са достатъчни да изпълним желаното оцветяване.

За всяка триангулация на произволен n-ъгълник е възможно да оцветим върховете на триъгълниците, като използваме три цвята, така че никои два съседни върха да са оцветени в един и същ цвят.

Ще докажем твърдението с индукция по n - броя на върховете на дадения многоъгълник. Твърдението $P(n)$, което желаем да докажем за всяко $n \geq 3$, ще изглежда така: За всяка триангулация на n-ъгълник е възможно да оцветим върховете на триагулиращите триъгълници в три цвята, така че всеки два съседни върха да са оцветени различно. Базисната стъпка $P(3)$ е очевидно вярна. Индуктивната хипотеза по силната индукция изисква да предположим верността на всичките $P(3), P(4), ..., P(n)$, след което остава да докажем $P(n+1)$. Нека е дадена триангулация на някакъв $n+1$-ъгълник. Да изберем произволна страна a на многоъгълника. Тя ще е и страна на някой от триангулиращите триъгълници T. Да означим с b и c другите две страни на T. Този триъгълник отрязва от дадения многоъгълник два по-малки триангулирани многоъгълника. В някой от случаите може да се окаже, че някой от тях не съществува. Оцветяваме върховете на единия от тях в три цвята според индукционното предположение (силна индукция). При това положение два от върховете на T са оцветени. Според индукционното предположение можем да оцветим и върховете на другия многоъгълник. Ако се окаже, че третият връх на T е оцветен в третия цвят, твърдението е доказано. Ако пък този връх е в някой от цветовете на вече оцветените върхове на T Преоцветяваме върховете на втория многоъгълник циклично, така че третият връх на T да се окаже в третия цвят.

Да се докаже, че числото, състоящо се от 243 пъти цифрата 1, се дели на 243.

На пръв поглед пряко прилагане на принципа на математическата индукция не се вижда. Но след като забележим, че

числото 243 е петата степен на числото 3 се разкрива идеята как да привлечем индукцията при решаване на задачата. Тази идея се потвърждава от това, че числото 111 се дели на 3, а числото 111111111 се дели на 9. Сега сме готови с формулирането на задача, към която можем да приложим математическата индукция, а именно: *Да се докаже, че числото, десетичният запис на което се състои от* 3^n *пъти цифрата 1, се дели на* 3^n. При $n=5$ получаваме разглежданата задача. Нека означим с a_n разглежданото число, състоящо се от 3^n пъти цифрата 1. Така $a_1=111, a_2=1111111111$ и т.н. Задачата е сега да докажем, че a_n се дели на 3^n. Базата на индукцията е налице. Пристъпваме към втората част на доказателството. Разглеждаме числото a_{n+1}. То се състои от 3^{n+1} на брой единици, което го представяме като три пъти записано едно след друго числото a_n, т.е. $a_{n+1}=a_n.10^{2n}+a_n.10^n+a_n=a_n.\left(10^{2n}+10^n+1\right)$. Числото a_{n+1} е произведение на числото a_n, което се дали на 3^n от индукционната хипотеза и на числото в скобите, което очевидно се дели на 3, защото сборът от цифрите му е равен на 3. От проведеното доказателство се вижда, че даже може да се докаже нещо по-силно, а именно : *Числото , състоящо се от* 3^n *пъти цифрата 1, се дели на* 3^n*, но не се дели на* 3^{n+1}. За целта трябва да се направят съответните корекции в индукционното предположение.

Обикновено прилагаме принципа на математическата индукция при доказване на твърдения, които са резултат на предварително извършени наблюдения, като откриване на зависимости и съотношения, които не са явно зададени. Ще започнем с откриване на общия член на редица, дефинирана индуктивно.

Функцията f *е дефинирана в множеството на естествените числа посредством*

$$f(1)=1, f(3)=3,\ f(2n)=f(n),$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n), f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$$

за всяко естествено число n.

Да с намери броят на естествените числа $n \le 1988$, *за които* $f(n)=n$.

(Задачата е от XXIX МОМ, Австралия, 1988 г.).

Ще се опитаме да открием явна формула за $f(n)$. За целта ще прибегнем до стратегията да извършим някои наблюдения. Пресмятаме първите няколко елемента на редицата. Имаме

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$:	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15	1	17	9	25	5

Забелязваме, че в разглежданите случаи $f(2^k)=1$, $f(2^k-1)=2^k-1$ и $f(2^k+1)=2^k+1$, което предполага връзка с двоичното представяне на числата. Да разгледаме отново част от горната таблица, но числата да са в двоичен запис.

n:	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101
$f(n)$:	1	1	11	1	101	11	111	1	1001	101	1101	11	1011

Сега лесно се проследява равенството $f(n)=n$. То е възможно тук, когато записът на числото n е симетричен, т.е. прочетен на обратно дава пак n. Нещо повече, забелязва се, че двоичният запис на $f(n)$ се получава от двоичния запис на n като го прочетем обратно и зачеркнем незначещите нули. Това засега е само наблюдение, което веднага превръщаме в хипотеза, която пък

доказваме чрез математическа индукция. Последната провеждаме в няколко стъпки. Тъй като $f(2n)=f(n)$ твърдението при четно n е очевидно. Нека $n=4k+1$, т.е. в двоичен запис $n=\overline{a_1a_2...a_m01}$. Тогава

$$f(4k+1)=2f(2k+1)-f(k)=2.\overline{1a_m...a_1}-\overline{a_m...a_1}$$
$$=2^{m+2}+2.\overline{a_m...a_1}-\overline{a_m...a_1}=\overline{10a_m...a_1}.$$

Случаят $n=4k+3$ се разглежда аналогично.

Математическата индукция се използва доста ефективно и при доказване на някои класически неравенства, например между средното аритметични и средното геометрично на произволен брой положителни числа или други неравенства между средни величини. При доказване на неравенство с помощта на математическата индукция често се налага предварително уточняване на хипотезата.

Да се докаже, че за всяко естествено n е в сила неравенството

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1.$$

Така зададеното неравенство не може да се атакува непосредствено с математическата индукция. За да извършим доказателството ще се ориентираме към друго неравенство, от което да следва даденото. За тази цел ще разгледаме неравенството $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$, от което даденото следва. Нека $n=2$. Тогава $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$, с което базата на индукцията е осигурена. Приемаме, че равенството е установено при $n=k$, т.е.

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{k}$. Сега прибавяме към двете страни на последното $\frac{1}{(k+1)^2}$ и получаваме $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<$ $1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$.

От друга страна $1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k+1}$, с което е доказана верността на неравенството при $n=k+1$.

След решението на тази класическа задача, ще разгледаме едно елегантно доказателство на неравенство, в което математическата индукция се проявява доста нестандартно.

Да се докаже, че ако $x_1,x_2,...,x_n\in[0;1]$, *където* $n\geq 3$ *е естествено число, то* $x_1+x_2+...+x_n-x_1x_2--x_2x_3...-x_nx_1\leq\left[\frac{n}{2}\right]$.

Индукцията ще проведем чрез стъпка 2, т.е. от n към $n+2$, към която се ориентираме поради наличието на числото $\left[\frac{n}{2}\right]$. За целта започваме със случаите $n=3$ и $n=4$.

При $n=3$ имаме

$$0\leq(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1-x_1-x_2-x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_3x_3-x_1x_2x_3,$$

откъдето

$$x_1+x_2+x_3-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1=1-x_1x_2x_3\leq 1.$$

При $n=4$ имаме съответно

$$0\leq(1-x_1)(1-x_2)+(1-x_3)(1-x_4)=1-x_1-x_2+x_1x_2+1-x_3-x_4+x_3x_4,$$

откъдето

$$x_1+x_2+x_3+x_4-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1\leq 2-x_2x_3-x_4x_1\leq 2.$$

С това базата на индукцията е доказана.

Имаме

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+2} - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n+1}x_{n+2} - x_{n+2}x_1 =$$

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1\right) +$$
$$x_{n+1} + x_{n+2} + x_nx_1 - x_nx_{n+1} - x_{n+1}x_{n+2} - x_{n+2}x_1$$

$$\leq \left[\frac{n}{2}\right] + x_{n+1} + x_{n+2} + x_nx_1 - x_nx_{n+1} - x_{n+1}x_{n+2} - x_{n+2}x_1 .$$

Остава да докажем, че $x_{n+1} + x_{n+2} + x_nx_1 - x_nx_{n+1} - x_{n+1}x_{n+2} - x_{n+2}x_1 \leq 1$, което е еквивалентно с $\left(1 - x_{n+1}\right)\left(1 - x_{n+2}\right) \geq x_1\left(x_n - x_{n+2}\right) - x_{n+1}x_{n+2}$. Последното е сигурно вярно ако $x_{n+2} \geq x_n$. Понеже даденото неравенство е инвариантно относно циклично завъртане на индексите, то винаги можем да поставим най-голямото от числата x_i на последно място, с което индукцията със стъпка 2 е завършена.

Още по-интересен вариант е индукцията, която прави скок напред и се връща назад. Такъв пример на индукция срещаме в работите на Коши. Такава индукция се нарича индукция на Коши или ретроградна индукция.

Нека $\left\{f\left(n\right)\right\}$ е безкрайна строго растяща редица от естествени числа, за която $f\left(2\right) = 2$ и $f\left(m.n\right) = f\left(m\right).f\left(n\right)$ за всяка двойка взаимно прости естествени числа m и n. Да се докаже, че $f\left(n\right) = n$ за всяко естествено число n.

От монотонността на $f\left(n\right)$ веднага следва, че $f\left(1\right) = 1$. Тъй като ще се работи по индукция ще се опитаме да установим, че $f\left(3\right) = 3$. Поради строгата монотонност $f\left(3\right)f\left(5\right) = f\left(15\right) < f\left(18\right) = f\left(2\right)f\left(9\right) = 2f\left(9\right)$. Но $f\left(9\right) < f\left(10\right) = f\left(2\right)f\left(5\right) = 2f\left(5\right)$, откъдето $f\left(3\right) < 4$, т.е. $f\left(3\right) = 3$.

Да отбележим, че поради строгата монотонност, ако е доказано, че $f(n)=n$ за някоя стойност на n, то $f(k)=k$ за всяко $k<n$. Сега ще приложим строгия вариант на индукцията, т.е. ще се движи от доказана стойност за всяко естествено число, ненадминаващо някое четно число $2n$ към следващото четно число $2(n+1)$. като използваме, че $f(2(2n-1))=f(2)f(2n-1)=2(2n-1)$, защото $2n-1<2n$ и използваме индукционното предположение и тъй като $2(n+1)<2(2n-1)$, твърдението е доказано.

Ще приведем още един пример за приложение на ретроградната индукция.

Нека $a_1,a_2,...,a_n$ са числа, всяко от които е по-голямо или равно на 1. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}.$$

Основа на индукцията е $n=2$. Трябва да се докаже, че $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}\geq\frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}}$.Понеже числата a_1 и a_2 са положителни, последното е еквивалентно на $(2+a_1+a_2)\left(1+\sqrt{a_1a_2}\right)\geq 2(1+a_1)(1+a_2)$, което от своя страна се свежда до $\left(\sqrt{a_1a_2}-1\right)\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geq 0$, което верността на основата е потвърдено. Да приложим сега доказаното за $n=2$ по следния начин.

Имаме $\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}\right)+\left(\frac{1}{1+a_3}+\frac{1}{1+a_4}\right)\geq\frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}}+\frac{2}{1+\sqrt{a_3a_4}}$. За последните две събираеми отново прилагаме доказаното за $n=2$.

Имаме $2.\left(\frac{1}{1+\sqrt{a_1a_2}}+\frac{1}{1+\sqrt{a_3a_4}}\right)\geq 2.\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}}=\frac{4}{1+\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}$ По такъв начин индукцията "скочи" от $n=2$ в $n=4$. Остава за се върнем за $n=3$. В този случай индукцията тръгва назад и затова е популярна под името ретроградна, т.е. движеща се назад, индукция. В доказаното вече неравенство за $n=4$ полагаме $a_4=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$. Получаваме

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\frac{1}{1+a_3}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}\geq\frac{4}{1+\sqrt[4]{a_1a_2a_3\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}}=\frac{4}{1+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}},$$

откъдето неравенството за $n=3$ следва. По–нататък е ясно. Индукцията скача към следващата четна стойност на n и се връща към предхождащата нечетна стойност.

Съществуват най–различни други разновидности на приложение на математическата индукция. Виждаме, че самият механизъм на приложение на индукцията не е сложен, но комбиниран с разглеждането на някои елементи от първоначалната част или от прехода в индуктивното доказателство правят метода пълноценен и много често незаменим. По–нататък ще илюстрираме и други интересни примери, в които индукцията ще се съчетае с различни изучени стратегии. Ще потърсим и нови възможности за доказване на теореми и изследване на интересни математически въпроси от различни области на математиката.

Математическа индукция и разглеждане на случаи. Една комбинация от стратегии

Чрез разглеждане на случаи често решаваната задача се разпада на две или повече задачи, във всяка от които действа допълнителна информация, въведена от приетото предположение. Ако така получените задачи могат да се атакуват с математическа индукция, тази комбинация от стратегии изглежда доста привлекателна.

Нека A е безкрайно множество от естествени числа, такова че всяко $a \in A$ е произведение на най-много n прости числа. Да се докаже, че съществува безкрайно подмножество B на A и число p, такова че най-големият общ делител на всеки две числа от B е равен на d.

Ще използваме индукция по n. При $n=1$, всичките числа от A са прости и следователно най-големият прост делител на всеки две от тях е равен на 1. Ще продължим с варианта на силната индукция. Да приемем, че твърдението на задачата е вярно за всяко $k<n$ и нека A е безкрайно множество от естествени числа, всяко от които има най-много n прости делители. Сега обособяваме два случая:

I) Съществува естествено число $q>1$, такова че съществуват безбройно много елементи на A, които са кратни на q. Тогава разглеждаме множеството от всички естествени числа от вида $\frac{a}{q}$. Последното съдържа безбройно много естествени числа, всяко от които е произведение на не повече от $n-1$ прости числа и според индукционното предположение ще съдържа

безкрайно подмножество B_1, такова че най-големият общ делител на всеки два негови елемента е равен на едно и също число, да кажем r. Оттук правим заключение, че множеството B от числата qb, където $b \in B_1$ е безкрайно и всеки два негови елемента имат най-голям общ делител равен на $d = qr$.

II) Вторият случай получаваме като отрицание на първия, т.е. за всяко $q > 1$ множеството на кратните на q е крайно. Нека $a_1 \in A$. Тогава съществуват само краен брой елементи $a \in A$, такива че $(a_1, a) > 1$. Разглеждаме подмножеството A_1 на A, състоящо се от елементите на A без тези краен брой числа. Нека $a_2 \in A_1$ и аналогично отбелязваме, че има най-много краен брой елементи $a \in A$, за които $(a_2, a) > 1$. Отстраняваме тези елементи от A_1 и продължаваме по същия начин. Този процес може да се продължи неограничено. По такъв начин конструираме безкрайно подмножество $\{a_1, a_2, ...\}$ на A, на което най-големият общ делител на всеки два негови елемента е равен на 1.

Да обърнем внимание на това как разглеждането на първия случай отвори врата за математическата индукция, докато във втория случай се наложи прилагането на друга стратегия – построяване на пример.

Да се докаже, че ако A е множество, състоящо се от $2m+1$ на брой цели числа, които не надминават по абсолютна стойност не надминават $2m-1$, то в A могат да се намерят три числа, сборът на които е равен на нула.

Ще приложим принципа на математическата индукция спрямо параметъра m. Нека $m=1$. Тогава множеството A се състои от три елемента -1, 0, 1 и сборът на тези числа е равен на нула.

Да приемем, че твърдението на задачата е вярно за множество A_1 с $2m-1$ различни елементи, които не надминават $2m-3$ по абсолютна стойност. Ако в A се съдържат $2m-1$ елементи на A_1, от индукционното предположение ще следва, че в A_1, а значи и в A, ще се съдържат три елемента със сбор 0. Ако това не е така, то в A ще се намират поне три от числата $2m-1, 2m-2, -2m+1, -2m+2$. Като вземем под внимание възникналата симетрия спрямо нулата симетрия, по същество възникват два случая $\{2m-1, 2m-2, -2m+1\} \subset A$ или $\{2m-1, 2m-2, -2m+2\} \subset A$.

Нека $\{2m-1, 2m-2, -2m+1\} \subset A$. Ясно е, че в процеса на търсене на трите числа, които да удовлетворяват условието, трябва да се ориентираме към отбелязаните по-горе числа. Разглеждаме следните $m-1$ на брой двойки числа, които имат сбор $2m-1$: $(1;2m-2),(2;2m-3),...,(m-1;m)$, а също така и следните m двойки със сбор $-2m+1$: $(0;-2m+1),(-1;-2m+2),...,(-m+1;-m)$. Общият брой разглеждани двойки е $2m-1$ и в тях участват всичките числа $-2m+1, -2m+2, ..., 0, 1, 2, ..., 2m-2$. В множеството A има общо $2m-2$ на брой числа различни от $2m-1$. Следователно в A сигурно ще се съдържа поне една от маркираните по-горе двойки. Ако тази двойка е със сбор $-2m+1$, комбинираме я с числото $2m-1$, а ако тази двойка е със сбор $2m-1$, комбинираме я с числото $-2m+1$. Така показваме, че наистина съществува тройка числа от A със сбор 0.

Нека $\{2m-1, 2m-2, -2m+2\} \subset A$. Макар и аналогичен на горния случай, за пълнота ще се разгледаме подробно и този. По подобен начин разглеждаме двойките $(0;2m-2),(1;2m-3),...,(m-2;m)$, които са със сбор $2m-2$ и са $m-1$ на брой и двойките $(-1;-2m+2),(-2;-2m+3),...,(-m+1;-m)$ със сбор $-2m+1$ и са $m-1$ на брой. Тези двойки включват всички числа, не надвишаващи $2m-2$, без числото $m-1$. Следователно в A се съдържа поне една от отбелязаните двойки и числата от нея могат да се комбинират според случая с $2m-2$ или $2m-1$.

Съчетаването на стратегията разглеждане на случаи с метода на математическата индукция ще използваме при решаването на задача от 27. МОМ. Там решенията на българските ученици Владимир Михов и Илия Крайчев предизвикаха огромен интерес именно с удачната комбинация на двете стратегии и дълго обикаляха страниците на математическите списания от това време.

В равнината е зададена координатна система и произволно крайно множество M от точки с цели координати. Винаги ли е възможно част от точките от M да се оцветят в бяло, а останалите – в червено, така че за всяка права L, успоредна на някоя от координатните оси , абсолютната стойност на разликата между броя на белите и червените точки върху L да не надминава единица?

Отговорът на въпроса в задачата е положителен и затова веднага пристъпваме към доказателството. Да означим с n броя на елементите на M. В двете решения, които ще изложим базите на индукцията са различни, но те не представляват особена трудност. Да предположим, че твърдението на задачата е вярно за всички

множества от точки с целочислени координати с не повече от $n-1$ елементи и нека M е с n елементи.

Първо решение. Ще разгледаме два случая.

I случай. Съществува права L, успоредна на някоя от координатните оси, върху която има нечетен брой точки от множеството M.

Разглеждаме множество M_1, състоящо се от точките на M, без една от точките на L. Това множество съгласно индукционното предположение може да бъде оцветено в съответствие на изискванията на задачата.(Да напомним индукцията работи!) При това оцветяване върху правата L ще има по равен брой бели и червени точки. Оцветяването на отстранената точка ще зависи дали върху правата, перпендикулярна на L, която минава през тази точка има четен или нечетен брой точки от M_1. Ако този брой е четен, няма значение в какъв цвят ще я оцветим, а ако този брой е нечетен, оцветяваме отстранената точка в цвят, който ще изравни точките от тази права.

II случай. Върху всяка права, успоредна на някоя от координатните оси, има четен брой точки от M.

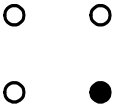
Отстраняваме произволна точка A от M. За полученото множество $M_1 = M \setminus A$ прилагаме индукционното предположение. Понеже множеството M в разглеждания случай има четен брой точки , то в множеството M_1 ще се съдържат нечетен брой точки. Без ограничение можем да считаме, че броят на белите точки е по-голям от броя на червените (те не могат да са с равен брой). Върху всяка от правите, съдържащи точки от M_1 без правите, минаващи през

отстранената точка ще имаме равенство на бели и червени точки. Върху последните ще имаме нечетен брой точки и следователно върху всяка от тях броят на белите ще е с единица повече от броя на червените. Сега просто оцветяваме отстранената точка в червено и разглежданият случай приключва.

Второ решение. Ще разгледаме няколко случая.

I случай. В множеството M има "правоъгълник" , т.е. четири точки, които са върхове на правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси. Отстраняваме тези точки и като използваме индукционното предположение оцветяваме останалите. Отстранените точки оцветяваме по диагонал, т.е. върховете, лежащи на един и същ диагонал – в един и същ цвят.

II случай. Множеството M не съдържа правоъгълници. Сега възникват нови два случая.



II$_а$ случай. Множеството M съдържа "ъгъл", т.е. три точки, които са върхове на правоъгълник (ясно е, че четвъртият връх на този правоъгълник не е от M). Отстраняваме от M трите точки от някой ъгъл и разглеждаме множество M_1, състоящо се от точките на M без отстранените точки от ъгъла и добавен четвъртият връх на правоъгълника. Множеството M_1 оцветяваме по индукционното предположение, при което добавената точка ще е получила някакъв цвят, да кажем бял. Тогава оцветяваме в бяло двете отстранени точки, които лежат на правите през добавената точка и в червен – върха на ъгъла.

II$_б$ случай. Множеството M не съдържа и ъгъл. Тогава последното може да се разглежда като обединение на точки от

прави, успоредни на координатните оси, такива че ако някоя от тях съдържа повече от една точка от M , то никоя от тези точки не лежи права, перпендикулярна на нея. Тогава оцветяваме точките независимо върху всяка такава права алтернативно.

Примерите, които разгледахме още веднъж подчертаха мощта на метода на математическата индукция. От една страна тя извършва "грубата" работа, а съчетаването с стратегията разглеждане на случаи дава насока към областта, в която индукцията трябва да работи.

Отново за математическата индукция. Приложения в различни области

С помощта на принципа на математическата индукция се решават много и разнообразни задачи. Комбинирана с други стратегии, индукцията заема все по-значително място в арсенала на експертите по решаване на задачи. Тук ще приведем решения на някои задачи, които имат теоретична основа в теорията на числата и алгебрата. Ще проследим къде в математиката методът на математическата индукция се прилага за доказателство на теоремите. Така например в теорията на числата се доказва основната теорема на аритметиката, според която всяко естествено число, по-голямо от 1, се разлага в произведение от прости числа и това разлагане се извършва по единствен начин. Тази теорема се доказва с помощта на математическата индукция, а разновидността на нейното приложение се нарича мултипликативна индукция.

Ще започнем със задачи, свързани с понятието пълна система от остатъци. Да напомним, ако $n > 1$ е естествено число множеството от цели числа $a_1, a_2, ..., a_n$ се нарича пълна система от остатъци по модул n, ако никои две от тях не дават един и същ остатък при деление с n. Това понятие играе важна роля в теорията на числата и затова интересът към него е естествен.

Естествените числа, в десетичния запис на които се среща само цифрата 1, се наричат репюнити (повтарящи се единици) В тази задача обаче ще възприемем за тези числа термина "единични". Да се намерят всички естествени числа

$n>1$, за които съществуват n единични числа, които образуват пълна система от остатъци по модул n.

Очевидно ако n е някое от търсените числа, то n не може да е четно и да се дели на 5. Следователно $(n,10)=1$ и по теоремата на Ойлер - Ферма ще имаме $10^{\varphi(n)} \equiv 1(\bmod n)$, което показва, че n е делител на числото, записано с $\varphi(n)$ на брой деветки. Ако n не се дели на 3, ще следва, че n е делител на единично число, броят на единиците на което е $\varphi(n)<n$. Това показва, че не съществува пълна система от остатъци по модул n в този случай. Нека $n=3^k.m$, където $k\geq 1$ и $m>1$, което не се дели на 3. Ще докажем, че и в този случай не съществува пълна система от остатъци по модул n. За целта е достатъчно да докажем, че има единично число, кратно на n, броят на цифрите на което е по-малък от n.Такова е единичното число с $3^k\varphi(m)$ единици. Остават числата $n=3^k$. Сега с помощта на индукция по k се доказва леко, че първите 3^k на брой единични числа образуват пълна система от остатъци по модул $n=3^k$.

Числата, в десетичния запис на които участват само нули и единици, наричаме "двоични" .Да се намерят всички естествени числа $n>1$, за които съществуват n двоични числа, които образуват пълна система от остатъци по модул n.

Очевидно нито едно от търсените числа n не може да се дели на 5, защото тогава не могат да се намерят двоични числа, които при деление с n да дават остатък 2, 3, 4 например. Нека сега n не се дели на 5. Ще докажем, че съществуват n двоични числа, които образуват пълна система по модул n. Нека $n=2^k.m$, където m е число, взаимно

просто с 10. Ще използваме индукция относно параметъра k, за да построим подходящ пример на такава пълна система от остатъци. Идеята за приложение на математическата индукция в този случай ще ни доведе до твърдение за съществуване, без да можем явно да построим, т.е. да видим, необходимия пример.

При $k=0$ прилагаме теоремата на Ойлер–Ферма $10^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$ и за всяко $r=1,2,...,m-1,m$ полагаме $a_r = 10^{r\varphi(m)} + 10^{(r-1)\varphi(m)} + ... + 10^{\varphi(m)}$. Числата a_r са двоични и освен това $a_r \equiv r(\bmod m)$, т.е. $a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m$ образуват пълна система от остатъци по модул , с което случаят $k=0$ е доказан. Да приемем, че за някое $k \geq 1$ съществува пълна система от остатъци по модул $n = 2^k.m$ и да означим последната с $a_1, a_2, ..., a_n$. Разглеждаме следните $2n$ на брой числа, които се получават от елементите на пълната система от остатъци по модул n като към всеки елемент дописваме цифрата 0 и цифрата 1. Ще установим, че така получените $2n$ на брой числа образуват пълна система от остатъци по модул $2n$. Наистина, ако за някои две от тези числа $\overline{a_i\varepsilon_1}$ и $\overline{a_j\varepsilon_2}$ се окаже, че дават равни остатъци при деление с $2n$, те ще имат еднакви последни цифри, т.е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и тогава разликата на тези числа ще е равна на $10.(a_i - a_j)$, а тъй като n и 5 са взаимно прости ще следва, че разликата $a_i - a_j$ ще се дели на n, което е противоречие с приемането, че разглежданите числа образуват пълна система от остатъци по модул n.

Ще продължим с някои приложения на математическата индукция в алгебрата. В алгебрата едно от водещите понятия е това за многочлен (полином). Важна характеристика на полиномите е, че

всеки ненулев полином има степен, която е цяло неотрицателно число. А това е предпоставка за прилагане на математическата индукция за доказване на теореми и решаване на задачи за полиноми. В училищния курс по алгебра се доказва, че ако един полином (да отбележим с произволен брой променливи) е записан в нормален вид, т.е. като сбор от неподобни едночлени в нормален вид и приема стойност 0 за всеки набол от стойностите на променливите, които участват в него, той е нулевият полином. Доказателството на тази теорема се извършва чрез математическа индукция по броя на променливите, а за основа на индукцията, т.е. за полиноми с една променлива отново се използва математическа индукция, но по броя на едночлените, които участват в него. С помощта на тази теорема се извежда основния критерий за тъждественост на два полинома. Друго много важно твърдение от алгебрата на полиномите на една променлива, което също успешно са доказва чрез математическа индукция, е, че ако един полином $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ на една променлива x се анулира за повече от n стойности на x, той е нулевият полином. С други един ненулев полином на една променлива не може да има повече корени от неговата степен. Тази теорема е известна под името принцип за сравняване на коефициентите.

В алгебрата се доказва и теорема, според която всеки ненулев полином на една променлива, коефициентите на който са произволни комплексни числа, има поне един корен, който в общия случай е комплексно число. За пръв път тази теорема е формулирана от френския математик Даламбер, който дава едно не съвсем строго доказателство. Първото строго доказателство на теоремата е дадено

от германския математик Гаус. Това е доказателство по индукция, но в него се използва важната теорема за симетричните полиноми. След Гаус са намерени най-разнообразни доказателства и причината за това е, че въпросната теорема е много важна за математиката и не случайно тя е известна под името основна теорема на алгебрата. Известна е още като теорема на Даламбер. Класическото доказателство на теоремата, предложено от Коши, може да се намери в учебника на проф. Обрешков "Висша Алгебра".

Теорема (Основна теорема на алгебрата на комплексните числа.) Ако $p(z)$ *е полином с произволни коефициенти – комплексни числа от степен* $n > 0$*,то* $p(z)$ *има поне един корен, който е комплексно число.*

За удобство ще приемем, че полиномът $p(z)$ е нормиран, т.е. има вида $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$. Ако $z = x + yi$, полиномът $p(z)$ може да се запише като $p(z) = p_1(x,y) + p_2(x,y)$, където $p_1(x,y)$ и $p_2(x,y)$ са полиноми на двете променливи x и y с реални коефициенти. Имаме $|p(z)| = \sqrt{(p_1(x,y))^2 + (p_2(x,y))^2}$. Очевидно полиномът $(p_1(x,y))^2 + (p_2(x,y))^2$ е реална и непрекъсната функция на променливите x и y. Следователно и функцията $|p(z)|$ е също непрекъсната.

Единственото, което ще се използва в доказателството извън границите на алгебрата е, че всяка непрекъсната реална функция върху затворен кръг $D = \{(x,y), x^2 + y^2 \le R\}$ има най-малка стойност. В предложеното доказателство обособяваме две части:

1) Съществува комплексно число z_0, такова че $|p(z_0)| \le |p(z)|$ за всяко комплексно число z.

2) Ако z_0 е така намереното число, то $p(z_0) = 0$.

Първата част ще доказваме с помощта на едно помощно твърдение, т.н. Лема на Коши.

Нека $f(z)$ е полином с комплексни коефициенти от степен $n > 0$. За всяко положително число M съществува положително число R, такова че за всяко z, за което $|z| > R$, то $|f(z)| > M$.

Именно тази лема ще докажем с индукция по степента n. Нека $n = 1$, т.е. $f(z) = az + b$, $a \ne 0$.Тогава $|f(z)| = |az + b| \ge |az| - |b| = |a||z| - |b|$. За даденото M полагаме $R = \dfrac{M + |b|}{|a|}$. Тогава от $|z| > R$ следва $|f(z)| > M$. При5емаме, че лемата е вярна за полиноми от степен $n-1$ и нека $f(z)$ е полином от степен n. Тогава $f(z) = c + zf_1(z)$, където $f_1(z)$ е полином от степен $n-1$. Сега за даденото M според индукционното предположение избираме $R \ge 1$, такова че $|f_1(z)| > M + |c|$, откъдето при $|z| > R$ ще имаме

$$|f(z)| = |c + zf_1(z)| \ge |z||f_1(z)| - |c| \ge |f_1(z)| - |c| \ge M + |c| - |c| = M.$$

С това лемата е доказана.

Нека $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.Избираме $R > 0$, такова че $|p(z)| \ge 1 + |a_0|$ и нека $D = \{z, |z| \le R\}$. На това място ще се възползваме от теоремата, за която казахме, че ще използваме наготово, а именно, че в D може да се намери z_0, такова, че $|p(z_0)| \le |p(z)|$ за всяко z от

D. От избора на D се вижда, че фактически $|p(z_0)| \le |p(z)|$ е в сила и за всяко z. Това е така, защото ако $|z| > R$, то $|p(z)| \ge 1 + |a_0| = 1 + |p(0)| > |p(0)|$. Понеже нулата лежи в диска D, то $|p(0)| \ge |p(z_0)|$. По такъв начин първата част на теоремата е доказана. Изборът на математическата индукция направи предложеното доказателство значително по-прозрачно и автономно, т.е. избегнати бяха и други по-висши съображения. Втората част от доказателството е малко или повече близка до класическото доказателство, поради което ще го пропуснем.

Междинната стъпка

Да припомним, че според определението на понятието задача пътят към целта по принцип е блокиран. Много често този блокаж се дължи на някакъв междинен помощен факт, който явно не фигурира в условието на задачата, но откриването му разкрива веднага път за решаване на задачата. Сега ще разгледаме стратегията за намиране на такива междинни помощни резултати. Често с учебна цел задачите се формулират чрез задаване на помощни факти във формата на подходящо упътване. Това упътване препоръчва на решаващия да установи някакъв факт, който по идея не е много сложен, след което използването на този факт бързо води до успешен край на решението на задачата. Така решаващият е облекчен, защото такова упътване трасира подхода към решаването на задачата. От друга страна, привеждането на упътвания често стресира читателя и създава чувство на определена доза несигурност дали в подобни ситуации, той би могъл да открие такива решения без да ползва упътването, т.е. той сам да достигне до съответния междинен резултат. Още повече, че истинските задачи възникват не в сборниците с упътвания, а са отражение на реалната действителност. Ще се опитаме да илюстрираме стратегия на използването на междинната стъпка на базата на един много широк и важен клас задачи, каквито са задачите за доказателство на неравенства. Ще започна със случай от моята практика. В едно унгарско списание по математика за ученици срещнах следната задача .

Да се докаже, че ако $a>0, b>0, c>0$, *то*

$$ab^5+bc^5+ca^5 \ge abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$$

Привеждам по-долу публикуваното в списанието решение. Имаме

$$ab^5+bc^5+ca^5=\frac{8+2+11}{21}\left(ab^5+bc^5+ca^5\right)=\frac{8ab^5+2bc^5+11ca^5}{21}+$$
$$\frac{11ab^5+8bc^5+2ca^5}{21}+\frac{2ab^5+11bc^5+8ca^5}{21}\ge\sqrt[21]{\left(ab^5\right)^8\left(bc^5\right)^2\left(ca^5\right)^{11}}$$
$$+\sqrt[21]{\left(ab^5\right)^{11}\left(bc^5\right)^8\left(ca^5\right)^2}+\sqrt[21]{\left(ab^5\right)^2\left(bc^5\right)^{11}\left(ca^5\right)^8}=abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

.

Кратко и ясно! Авторите на задачата са се “досетили”, че е удобно да представят числото 1 като сбор на дробите $\frac{8}{21},\frac{2}{21},\frac{11}{21}$, след което са приложили традиционното за подобни случаи неравенство на Коши между средното аритметично и средното геометрично за даден набор от положителни числа с подходящи тегла. Читателят лесно може да реши за себе си, че за такова “хитро” представяне на единицата, едва ли ще му е лесно да се досети, но все пак от тук тръгва идеята за помощното твърдение, което да открие пътя към решението. Нека отговорим на въпроса: Кое е това помощно твърдение? Става дума за доказаното по горе неравенство $a^3b^2c\le\frac{8}{21}ab^5+\frac{2}{21}bc^5+\frac{11}{21}ca^5$. Това неравенство записваме още два пъти като променливите a,b,c завъртим циклично, събираме почленно трите неравенства и получаваме това, което трябваше да се докаже. Както се вижда, няма проблем с доказването на междинното неравенство, а също така и след това прилагането му с довършване на доказателството. Истинският проблем е как да се досетим за

точния вид на помощното неравенство. От доказателството му оставаме с впечатлението, че помощното неравенство разпределя ролята на всеки участващ едночлен , т.е. за всеки едночлен от лявата страна на неравенството някаква комбинация от едночлени с подходящи коефициенти "носи отговорност" , т.е. той си взаимодейства с части от едночлените там. А самото неравенство някак си се разцепва на три "удобни" неравенства.

Проблемът с досещането винаги е бил чисто индивидуален, но ако може по някакъв начин да се създаде метод за откриване на подходящо междинно твърдение поне за някакъв клас задачи, това би спестило много усилия. Ще обясним как може да стигнем до откриването на подходящо междинно неравенство върху един по-лек пример на задача, по същество задача от МОМ.

Да се докаже, че ако

$x>0, y>0, z>0$, *то* $xy^3+yz^3+zx^3 \ge xyz(x+y+z)$.

Ще възприемем идеята за "носене на отговорност", т.е. ще потърсим помощно неравенство от вида $x^2yz \le \alpha xy^3+\beta yz^3+\gamma zx^3$ с неизвестни засега коефициенти α,β,γ. Поради факта, че равенство в подобни задачи се достига само при $x=y=z$, можем да считаме, че $\alpha+\beta+\gamma=1$. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме $\alpha xy^3+\beta yz^3+\gamma zx^3 \ge \left(xy^3\right)^{\alpha}\left(yz^3\right)^{\beta}\left(zx^3\right)^{\gamma}$. Сега числата α,β,γ трябва да удовлетворяват системата уравненията

$$\left|\begin{array}{l}\alpha+3\gamma=2\\ 3\alpha+\beta=1\\ 3\beta+\gamma=1\end{array}\right..$$

Решаваме тази система и получаваме $\alpha = \frac{2}{7}; \beta = \frac{1}{7}; \gamma = \frac{4}{7}$. Това означава, че евентуално помощното ни неравенство трябва да изглежда така $x^2yz \le \frac{2}{7}xy^3 + \frac{1}{7}yz^3 + \frac{4}{7}zx^3$. Доказателството на последното получаваме от неравенството между средното аритметично и средното геометрично

$$\frac{2}{7}xy^3 + \frac{1}{7}yz^3 + \frac{4}{7}zx^3 \ge \left(xy^3\right)^{\frac{2}{7}}\left(yz^3\right)^{\frac{1}{7}}\left(zx^3\right)^{\frac{4}{7}} = x^2yz,$$

след което записваме горното неравенство като завъртаме буквите в цикличен ред

$$\frac{2}{7}yz^3 + \frac{1}{7}zx^3 + \frac{4}{7}xy^3 \ge \left(yz^3\right)^{\frac{2}{7}}\left(zx^3\right)^{\frac{1}{7}}\left(xy^3\right)^{\frac{4}{7}} = y^2zx$$

и $\frac{2}{7}zx^3 + \frac{1}{7}xy^3 + \frac{4}{7}yz^3 \ge \left(zx^3\right)^{\frac{2}{7}}\left(xy^3\right)^{\frac{1}{7}}\left(yz^3\right)^{\frac{4}{7}} = z^2xy$. Събираме тези три неравенства почленно и така достигаме до желаното неравенство.

Това решение обяснява защо и как са се появили такива “екзотични” коефициенти в унгарската задача, а и как се е появил предложения по-горе подход. Освен това възможността да се откриват помощни неравенства ни дава увереност в решаване на задачите за доказателство на по-сложни неравенства. Образно казано, ако си представим доказването на неравенство като пресичане на пълноводна река, междинното неравенство играе роля на брод през тази река, т.е. място където може да се стъпи, за да се премине безопасно на другия бряг.

Идеята за използване на междинно неравенство заслужава внимание при доказването на други типове неравенства. Тя е

свързана с представата, че всяко неравенство се “разцепва” на някои помощни неравенства. Например от основното неравенство $\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\geq ab$, от което след мултиплициране имаме $\frac{1}{2}\left(b^2+c^2\right)\geq bc$ и $\frac{1}{2}\left(c^2+a^2\right)\geq ca$ и съберем трите неравенства ще получим едно много известно класическо неравенство $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$. От доказателството на последното следва, че равенство се достига само ако $a=b=c$.

Да се докаже, че

ако $a>0, b>0, c>0$, *то* $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Правим опит за откриване на междинно неравенство, т. е. някаква комбинация от изразите $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ да покрива израза $\frac{x+y}{x^2+y^2}$. Това може да стана, например, така: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\geq 2\frac{x+y}{x^2+y^2}$ (използваме отново, че $xy\leq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$). Така това помощно неравенство открива пътя към окончателното доказателство на даденото неравенство.

От разгледаните примери става ясно, че при доказване на неравенства от определен тип си струва опита да разберем как се преразпределят взаимодействията на изразите от едната страна на неравенството спрямо изразите от другата. Понякога, както в разгледаните по-горе примери, може да се открие това взаимодействие “на око”, т.е. посредством някои сръчни преобразования или конкретни наблюдения, но в повечето случаи,

например като в “унгарската” задача тези взаимодействия са доста “замаскирани” и намирането само от въображение не винаги е възможно.

Да се докаже, че

ако $a>0, b>0, c>0$, *то* $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{2}$.

Като изпреварим за малко събитията ще съобщим веднага помощното неравенство $\frac{x^2}{x+y}\geq\frac{3x-y}{4}$, за което веднага можем да кажем, че последното се доказва лесно (с непосредствена проверка), а прилагането му води до доказване на даденото неравенство. Проблемът е по какъв начин да “изобретим” това помощно неравенство. По-нататък за нас трябва да заработи психологическата стратегия, свързана с убедеността, че съществува подходящо помощно неравенство. Идеята за такова съществуване ни дават разгледаните вече примери. Тази убеденост ни кара да търсим удобно неравенство от определен тип, т.е. търсим неизвестни числа α и β, за които е в сила неравенство от вида $\frac{x^2}{x+y}\geq\alpha x+\beta y$ за произволни положителни числа x и y .Отново се съобразяваме с бележката, че равенство трябва да се достигне при $x=y$, което ни дава предположението, че $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$. Сега привеждаме търсеното неравенство под общ знаменател и извършваме опростяването $x^2\geq\alpha x^2+\alpha xy+\beta xy+\beta y^2$ или $(1-\alpha)x^2-\frac{1}{2}xy+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)y^2\geq 0$. Тъй като лявата страна на последното е хомогенен полином на x и y, след

характерното за такива случаи полагане $x = ty$, достигаме до $(1-\alpha)t^2 - \frac{1}{2}t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \geq 0$. Последното трябва да бъде изпълнено за всяко положително t, а от идеята за равенство, когато $x = y$, се вижда, че лявата му страна е полином с корен 1 (проверете, че сборът от коефициентите на полинома е 0). Следователно да числото 1 трябва е за двоен корен за този полином (в противен случай, той ще си смени знака при $t = 1$). Тогава $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4(1-\alpha)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = 0$. Това уравнение има единствен корен $\alpha = \frac{3}{4}$. Така открихме евентуалните коефициенти на помощното неравенство. Това не означава обаче, че сме доказали помощното неравенство, а само сме установили, че ако такова съществува, то трябва да е с коефициенти $\alpha = \frac{3}{4}$ и $\beta = -\frac{1}{4}$.

Върху няколко примера ще илюстрираме развитието на техническите похвати при работа с предложения метод.

Да се докаже, че

$$\text{ако } a > 0, b > 0, c > 0, \text{ то } \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Вече сме наясно, че ще търсим помощно неравенство от вида $\frac{x^3}{x+y} \geq \alpha x^2 + \beta y^2$ за положителни x и y с $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$. Освобождаваме се от знаменателя $x + y$, който е положителен, заместваме $\beta = \frac{1}{2} - \alpha$ и достигаме до неравенството $(1-\alpha)x^3 - \alpha x^2 y + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)xy^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)y^3 \geq 0$.

Последното е хомогенно и както в предишния пример след полагането $x = ty$ получаваме $(1-\alpha)t^3 - \alpha t^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \geq 0$.

Този полином има корен $t = 1$, а след като горното неравенство трябва да е в сила за всяко положително t, следва, че $t = 1$ трябва да е негов двоен корен. От разлагането

$$(1-\alpha)t^3 - \alpha t^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = (t-1)\left((1-\alpha)t^2 + (1-2\alpha)t + \frac{1}{2} - \alpha\right)$$

виждаме, че $1 - \alpha + 1 - 2\alpha + \frac{1}{2} - \alpha = 0$, откъдето намираме $\alpha = \frac{5}{8}$. При така намерената стойност за α помощното неравенство трябва да изглежда така $\frac{x^3}{x+y} \geq \frac{5x^2 - y^2}{8}$. Последното е вярно за положителни x и y, защото то се получава от очевидното неравенство $(x-y)^2(3x+y) \geq 0$. Равенство ще имаме само ако $x = y$. Сега вече помощното неравенство ни "развързва ръцете".

Имаме $\frac{a^3}{a+b} \geq \frac{5a^2 - b^2}{8}$, $\frac{b^3}{b+c} \geq \frac{5b^2 - c^2}{8}$ и $\frac{c^3}{c+a} \geq \frac{5c^2 - a^2}{8}$.

Събираме почленно и получаваме $\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

Ще разгледаме още един техническо отношение по-сложен пример, но и тук атаката с неопределените коефициенти ще е решаваща.

Да се докаже, че ако $a > 0, b > 0, c > 0$, *то*

$$\frac{a+b}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b+c}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c+a}{2c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Отново се базираме на предположението, че всяко от събираемите в ляво поема "отговорност" за някаква комбинация за сега с неопределени коефициенти на събираемите в дясно, т. е. търсим помощно неравенство от вида $\frac{x+y}{2x^2+y^2+z^2} \le \frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}$ за положителни x, y, z с неизвестни коефициенти α, β, γ, като от съображението за равенство при $x=y=z$, можем да считаме, че $\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}$. Ако наистина съществува нужното междинно неравенство, то след като положим $z=x$ (с цел намаляване на променливите) ще приведем горното до вида $\frac{x+y}{3x^2+y^2} \le \frac{\alpha+\gamma}{x}+\frac{\beta}{y}=$

$\frac{x+y}{3x^2+y^2} \le \frac{\alpha+\gamma}{x}+\frac{\beta}{y}=\frac{\frac{1}{2}-\beta}{x}+\frac{\beta}{y}$. След привеждане под общ знаменател и опростяване, достигаме до

$$3\beta x^3+\left(\frac{1}{2}-3\beta\right)x^2y+(\beta-1)xy^2+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)y^3 \ge 0 \ .$$

Поради хомогенността на получения многочлен елиминираме едната променлива чрез полагането $x=ty$ и достигаме до неравенството

$$f(t)=3\beta t^3+\left(\frac{1}{2}-3\beta\right)t^2+(\beta-1)t+\left(\frac{1}{2}-\beta\right) \ge 0 .$$

Тъй като този многочлен има корен $t=1$, той допуска разлагането $f(t)=(t-1)\left(3\beta t^2+\frac{1}{2}t+\beta-\frac{1}{2}\right)$. Вече изказахме съображения, защо и вторият множител трябва да има корен $t=1$, т. е. $3\beta+\frac{1}{2}+\beta-\frac{1}{2}=0$, откъдето $\beta=0$. Следователно ако съществува междинно неравенство

от търсения вид, то в него $\beta = 0$, т.е. $\frac{x+y}{2x^2+y^2+z^2} \le \frac{\alpha}{x} + \frac{\gamma}{z}$, като $\alpha + \gamma = \frac{1}{2}$. В търсеното неравенство можем например да положим $y = x$ и да повторим процедурата. Ще получим $\alpha = \frac{1}{4}$. Следователно търсеното междинно неравенство трябва да изглежда така $\frac{x+y}{2x^2+y^2+z^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)$. Дали обаче горното неравенство е в сила за произволни положителни числа x, y, z ? Ще докажем, че това е така. Това неравенство е равносилно с $4(x+y)xz \le (x+z)(2x^2+y^2+z^2)$, което може да се преработи до $x(x-z)^2 + x^3 + xy^2 + y^2z + z^3 - 4xyz \ge 0$. Първото събираемо е очевидно неотрицателно, а второто е неотрицателно поради неравенството между средното аритметично и средното геометрично. Сега с помощта на полученото неравенство можем да запишем $\frac{a+b}{2a^2+b^2+c^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$, $\frac{b+c}{2b^2+c^2+a^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$ и $\frac{c+a}{2c^2+a^2+b^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)$. След като съберем горните, получаваме зададеното.

Да се докаже, че ако $a > 0, b > 0, c > 0$, *то*

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} + \frac{b+c}{3b^2+2c^2+a^2} + \frac{c+a}{3c^2+2a^2+b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Ще приложим предложената по-горе процедура за новото неравенство. Търсим помощно неравенство за положителни числа x, y, z от вида $\frac{x}{3x^2+2y^2+z^2} \le \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z}$ с неизвестни коефициенти

α, β, γ . Използваме съображения за равенство при $x = y = z$, за да приемем, че $\alpha + \beta + \gamma = 1$. В търсеното неравенство полагаме $z = y$.

Така последното добива вида $\frac{x}{3x^2 + 3y^2} \le \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta + \gamma}{y} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\frac{1}{6} - \alpha}{y}$.

Освобождаваме се от знаменателя и подреждаме по степените на променливите. $\left(\frac{1}{2} - 3\alpha\right)x^3 + (3\alpha - 1)x^2 y + \left(\frac{1}{2} - 3\alpha\right)xy^2 + 3\alpha y^3 \ge 0$. След полагането $x = ty$ достигаме до неравенството с променлива t : $\left(\frac{1}{2} - 3\alpha\right)t^3 + (3\alpha - 1)t^2 + \left(\frac{1}{2} - 3\alpha\right)t + 3\alpha \ge 0$. Полученият многочлен на t има корен $t = 1$, защото той бе така конструиран. Следователно, за да е изпълнено неравенството за всяко положително t е необходимо този корен да е двоен. Изнасяме пред скоби множителя $t - 1$ чрез разлагане или по схемата на Хорнер и получаваме $(t-1)\left(\left(\frac{1}{2} - 3\alpha\right)t^2 - \frac{1}{2}t - 3\alpha\right)$.

Следователно $\frac{1}{2} - 3\alpha - \frac{1}{2} - 3\alpha = 0$ откъдето $\alpha = 0$. По такъв начин търсеното помощно неравенство добива вида $\frac{x}{3x^2 + 2y^2 + z^2} \le \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z}$ с $\beta + \gamma = \frac{1}{6}$. Полагаме $z = x$ и получаваме $\frac{x}{4x^2 + 2y^2} \le \frac{\beta}{y} + \frac{\frac{1}{6} - \beta}{x}$, което преработваме до вида $4\beta x^3 - \left(\frac{1}{3} + 4\beta\right)x^2 y + 2\beta xy^2 + \left(\frac{1}{3} - 2\beta\right)y^3 \ge 0$. Лявата страна на полученото неравенство е полином на t с корен $t = 1$ и по известните съображения следва, че $t = 1$ трябва да е двоен корен. Тогава имаме

разлагането $(t-1)\left(4\beta t^2-\frac{1}{3}t+2\beta-\frac{1}{3}\right)$ и $4\beta-\frac{1}{3}+2\beta-\frac{1}{3}=0$, откъдето $\beta=\frac{1}{9}$ и $\gamma=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$. Така подучихме, че търсеното помощно неравенство има вида $\frac{x}{3x^2+2y^2+z^2}\le\frac{1}{18}.\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$.Сега остава да го докажем. Наистина последното е еквивалентно на неравенството , $18xyz\le\left(3x^2+2y^2+z^2\right)\left(2z+y\right)=6x^2z+3x^2y+4y^2z+2z^3+2z^3+z^2y$,

което следва от неравенството между средното аритметични и средното геометрично. Сега доказателството на даденото неравенство се получава след като съберем доказаните вече неравенства $\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}\le\frac{1}{18}.\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}\le\frac{1}{18}.\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$ и $\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{1}{18}.\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{c}\right)$.

Предложеният метод за търсене на междинно неравенство чрез метода на неопределените коефициенти ще прилагаме и в други случаи. Трябва да отбележим, че този метод по никакъв начин не трябва да се счита за универсален. Той води до резултат само ако неистина такова междинно неравенство съществува. Но как можем да сме сигурни, че това е наистина е така ? Единствено - ако проверим. Изводът е, че ако съществува подобно неравенство, ще решим задачата, а ако не съществува – ще трябва да се търсят други възможности. Да формулираме отделните фази на метода. Първо – определяне вида на помощното неравенство с неопределени коефициенти, второ – доказване на помощното неравенство и трето – приложение на помощното неравенство за доказване на оригиналното неравенство. Нито една от тези фази не трябва да се

подценява. В следващия пример ще видим, че пропускането на някоя от фазите може да причини съществени дефекти в доказателството.

Да се докаже, че ако $a>0, b>0, c>0$, *то*

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

На пръв поглед неравенството изглежда като тези, които вече разглеждахме. От натрупания до този момент опит изглежда разумно да потърсим помощно неравенство от вида $\frac{x^3}{2x^2+y^2}\geq\alpha x+\beta y$ за произволни положителни числа x и y, като $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$. Както в познатите ни вече примери свеждаме неравенството до вида $(1-2\alpha)t^3+\left(2\alpha-\frac{2}{3}\right)t^2-\alpha t+\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\geq 0$, където $t=\frac{x}{y}$.

Като използваме, че $t=1$ е двоен корен на горния полином, получаваме, че $\alpha=\frac{5}{9}$, т.е. помощното неравенство трябва да изглежда по следния начин: $\frac{x^3}{2x^2+y^2}\geq\frac{5x-2y}{9}$. Последното след освобождаването си от общ знаменател и опростяване се свежда до $x^3-4x^2y+5xy^2-2y^3\leq 0$ за всяко положително x и y. Очевидно полученото неравенство не е вярно, защото последният полином от трета степен са разлага на множители по следния начин $(x-2y)(x-y)^2$ и той приема отрицателни стойности за някои положителни стойности на x и y.

Този пример ни показва, че методът на търсене на междинно неравенство чрез неопределени коефициенти не работи ако такова

неравенство не съществува. Той показва, че спазването на последователността от дейности е съществено и ако някоя от тези дейности е невъзможна за изпълнение, трябва да се търсят други средства за откриване на доказателството. Ще допълним само, че предложеното неравенство е вярно, но средствата за неговото решение са доста по-сложни и не се отнасят към темата за междинната стъпка.

Методът на неопределените коефициенти и неравенството на Коши – Буняковски – Шварц

Успешното използване на метода на неопределените коефициенти, използван за откриване на помощни неравенства при доказателството на някои типове неравенства, ни насочва към някои негови приложения и при други типове неравенства. Можем да отбележим, че доказателството на междинните неравенства в разглежданите до сега примери се извършваше с помощта на класическото неравенство на Коши между средното аритметично и средното геометрично или чрез разлагане на многочлени на множители. Могат да се предложат много примери, които няма да се отличават помежду си в идейно отношение, но в техническата им реализация ще изискват доста изобретателност. Тук ще разширим обхвата на метода с приложение на едно не по-малко знаменито неравенство – това на Коши - Буняковски – Шварц.

Нека $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_n)$ са две n–торки от реални числа. Тогава $|a_1b_1 + a_1b_2 + ... + a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$.

Равенство се достига само ако съществува число k , такова, че $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, ..., b_n = ka_n$.

Тъй като по-нататъшното ни изложение ще има по-скоро учебна цел, ще се ограничим с прилагане на горното неравенство само за $n = 3$, т.е. $|a_1b_1 + a_1b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$. Това неравенство е в сила за произволни реални числа, но ако го прилагаме за положителни числа, след полагането

$a_i = \sqrt{\frac{x_i}{y_i}}; b_i = \sqrt{x_i y_i}, i = 1,2,3$. представяме последното в следния по-удобен за приложение вид

$$\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}\right)\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3\right) \geq \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2,$$

което също ще наричаме неравенство на Коши – Буняковски – Шварц или КБШ неравенство.

Като илюстрация ще докажем някои неравенства.

Нека $a > 0, b > 0, c > 0$. *Да се докаже, че* $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

(Неравенство на Несбит).

Това неравенство, както и много други, допускат най-разнообразни възможности за тяхното доказателство. Тук ще използваме КБШ.

Полагаме $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ и $y_1 = b + c, y_2 = c + a, y_3 = a + b$.

Тогава $\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)\left(a\left(b+c\right) + b\left(c+a\right) + c\left(a+b\right)\right) \geq \left(a+b+c\right)^2$,

откъдето $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}$. Като използваме широко известното неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, неравенството на Несбит следва веднага.

Нека $a > 0, b > 0, c > 0$. *Да се докаже неравенството*

$$\frac{a}{a+2b+3c} + \frac{b}{b+2c+3a} + \frac{c}{c+2a+3b} \geq \frac{1}{2}.$$

След полагането $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ и $y_1 = a + 2b + 3c,$, $y_2 = b + 2c + 3a, y_3 = c + 2a + 3b$ неравенството лесно се получава като приложим КБШ.

Наистина,

$$\left(\frac{a}{a+2b+3c} + \frac{b}{b+2c+3a} + \frac{c}{c+2a+3b}\right).$$
$$\left(a\left(a+2b+3c\right) + b\left(b+2c+3a\right) + c\left(c+2a+3b\right)\right) \geq \left(a+b+c\right)^2,$$

откъдето

$$\frac{a}{a+2b+3c} + \frac{b}{b+2c+3a} + \frac{c}{c+2a+3b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2+5\left(ab+bc+ca\right)} \geq \frac{1}{2}.$$

Последното отново е следствие от $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Една удобна форма за прилагане на КБШ е следната. Нека $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3$ са три тройки положителни числа. Тогава $\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}\right)\left(y_1z_1 + y_2z_2 + y_2z_3\right) \geq \left(\sqrt{x_1z_1} + \sqrt{x_2z_2} + \sqrt{x_3z_3}\right)^2$, което се получава от класическата формулировка след полагането $a_i = \sqrt{\frac{x_i}{y_i}}$ и $b_i = \sqrt{x_iz_i}$.

Нека $a > 0, b > 0, c > 0$. *Да се докаже неравенството*

$$\frac{a^2}{a+2b+3c} + \frac{b^2}{b+2c+3a} + \frac{c^2}{c+2b+3a} \geq \frac{a+b+c}{6}.$$

Прилагаме последния вариант на КБШ с $x_1 = a^2, x_2 = b^2, x_3 = c^2$; $y_1 = a + 2b + 3c, y_2 = b + 2c + 3a, y_3 = c + 2a + 3b$ и $z_1 = z_2 = z_3 = 1$. И тъй като $y_1 + y_2 + y_3 = 6\left(a+b+c\right)$, неравенството следва.

Да се опитаме сега да приложим неравенството КБШ в комбинация с метода на неопределените коефициенти.

Нека $a>0, b>0, c>0$. *Да се докажат неравенствата*

$$\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{4b+c}+\frac{1}{4c+a}\geq\frac{1}{3a+b+c}+\frac{1}{3b+c+a}+\frac{1}{3c+a+b}\geq$$

$$\frac{1}{2a+2b+c}+\frac{1}{2b+2c+a}+\frac{1}{2c+2a+b}.$$

Ще доказваме двете неравенства последователно, като и за двете ще приложим КБШ. За лявото търсим неравенство от вида $\frac{1}{3a+b+c}\leq\frac{\alpha}{4a+b}+\frac{\beta}{4b+c}+\frac{\gamma}{4c+a}$ с неопределени коефициенти. Понеже очакваме равенство да имаме когато числата a,b,c са равни помежду си, то може да приемем, че търсените α,β,γ имат сбор 1. От КБШ получаваме

$$\left(\frac{\alpha}{4a+b}+\frac{\beta}{4b+c}+\frac{\gamma}{4c+a}\right)\left(\alpha(4a+b)+\beta(4b+c)+\gamma(4c+a)\right)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2=1,$$

откъдето

$$\frac{\alpha}{4a+b}+\frac{\beta}{4b+c}+\frac{\gamma}{4c+a}\geq\frac{1}{\alpha(4a+b)+\beta(4b+c)+\gamma(4c+a)}$$
$$=\frac{1}{(4\alpha+\gamma)a+(4\beta+\alpha)b+(4\gamma+\beta)c}.$$

Избираме числата α,β,γ, такива че $4\alpha+\gamma=3; 4\beta+\alpha=1$ и $4\gamma+\beta=1$. Решаваме системата и получаваме $\alpha=\frac{9}{13}, \beta=\frac{1}{13}, \gamma=\frac{3}{13}$. Следователно търсеното междинно неравенство трябва да има вида $\frac{1}{3a+b+c}\geq\frac{1}{13}.\left(\frac{9}{4a+b}+\frac{1}{4b+c}+\frac{3}{4c+a}\right)$. Последното е следствие от неравенството КБШ. Наистина

$$\frac{9}{4a+b}+\frac{1}{4b+c}+\frac{3}{4c+a}\geq\frac{1}{9(4a+b)+(4b+c)+3(4c+a)}=.$$

$$\frac{1}{39a+13b+13c}=\frac{1}{13(3a+b+c)}.$$

Като разместим местата на буквите, ще получим

$$\frac{1}{3b+c+a}\geq\frac{1}{13}.\left(\frac{9}{4b+c}+\frac{1}{4c+a}+\frac{3}{4a+b}\right) \text{ и}$$

$$\frac{1}{3c+a+b}\geq\frac{1}{13}.\left(\frac{9}{4c+a}+\frac{1}{4a+b}+\frac{3}{4b+a}\right).$$

След като съберем почленно получените три неравенства, достигаме до лявото неравенство.

За дясното търсим помощно неравенство от вида

$$\frac{1}{2a+2b+c}\leq\frac{\alpha}{3a+b+c}+\frac{\beta}{3b+c+a}+\frac{\gamma}{3c+a+b}$$

с неопределени коефициенти α,β,γ, такива че $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Прилагаме неравенството КБШ, откъдето

$$\left(\frac{\alpha}{3a+b+c}+\frac{\beta}{3b+c+a}+\frac{\gamma}{3c+a+b}\right).$$

$$\left(\left(\alpha(3a+b+c)+\beta(3b+c+a)+\gamma(3c+a+b)\right)\right)\geq 1,$$

откъдето

$$\frac{\alpha}{3a+b+c}+\frac{\beta}{3b+c+a}+\frac{\gamma}{3c+a+b}\geq\frac{1}{\alpha(3a+b+c)+\beta(3b+c+a)+\gamma(3c+a+b)}$$

$$=\frac{1}{(3\alpha+\beta+\gamma)a+(3\beta+\alpha+\gamma)b+(3\gamma+\alpha+\beta)c}.$$

Избираме сега коефициентите α,β,γ, така че те да удовлетворяват системата уравнения

$$\begin{cases} 3\alpha+\beta+\gamma=2 \\ 3\beta+\alpha+\gamma=2 \\ 3\gamma+\alpha+\beta=1 \end{cases}.$$

Понеже $\alpha+\beta+\gamma=1$, веднага получаваме, че $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ и $\gamma=0$. Следователно очакваме междинното неравенство да има вида $\frac{1}{2a+2b+c}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{3a+b+c}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3b+c+a}$. За да докажем последното полагаме $x=3a+b+c$ и $y=3b+c+a$. Тогава междинното неравенство се свежда към $\frac{2}{x+y}\le\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, което се проверява непосредствено. Сега разместваме буквите и записваме следните неравенства

$$\frac{1}{2b+2c+a}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{3b+c+a}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3c+a+b}$$

и $$\frac{1}{2c+2a+b}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{3c+a+b}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3a+b+c}.$$

Събираме трите (доказани вече) неравенства и получаваме доказателството на дясното неравенство.Да отбележим, че до откриването на междинното неравенство можехме да достигнем само чрез наблюдение. Самото му доказателство подсказва, че то е следствие от едно класическо неравенство, но предложеният метод работи в едно огромно пространство от ситуации и затова с основание може да се разглежда като тактика за доказателство на неравенства.

Методът на търсене на помощно неравенство, съчетан с прилагане на някое от класическите неравенства, ни дава добра перспектива за приложения.

Хомогенни неравенства

В разгледаните досега рационални симетрични неравенства от вида на една от двете страни, от съображения за степени на участващите многочлени, може да се направи заключение за вида на другата страна. Това дава възможност да се предвиди вида на помощното неравенство и да се търси такова с метода на неопределените коефициенти. Не така е когато трябва да се доказва неравенства, елементите на които са рационални хомогенни функции.

Ще илюстрираме нова идея за доказване на такива неравенства с помощта на няколко примера, като отново ще подчертаем, че предложеният метод не е универсален за подобни задачи. Той дава само възможност да се докажат определено количества неравенства, за които трудно се намират методи, които традиционно се използват.

Да се докаже, че ако $a>0, b>0, c>0$, *то*

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}.$$

(Задачата е публикувана в сп.“Математика и информатика”, бр.2,2002 г. Това е също така задача № 124 от книгата “Неравенства” на Седракян и Авоян, а освен това се оказа, че източникът е олимпиада в Япония)

За доказателството на това неравенства, както и на някои други подобни, ще използваме отново подхода с неопределените коефициенти, както и откриването на подходящо помощно неравенство. Проблемът в намирането на междинното неравенство се

състои в това, че в дясната част фигурира определено число и е почти невъзможно да се отгатне вида на функцията, която "носи отговорността" поотделно за всяко от събираемите вляво. Затова ще подходим по принципно нов начин. Използваме, че неравенството е хомогенно и без ограничение можем да фиксираме сбора $a + b + c$. Избираме $a + b + c = 3$, за да може да очакваме равенството да се достигне при $a = b = c = 1$. Имаме

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}=\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2}=\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}$$

като $a\in(0;3)$. От представянето $\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}=2-\frac{9}{2a^2-6a+9}$ следва, че най-малката стойност изразът достига при $a=\frac{3}{2}$, а ние очакваме равенството да се достигне при $a=1$. Затова ще потърсим друг вид неравенство – такова от вида $\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}\geq ka+l$, където k и l са неизвестни засега коефициенти, като равенство ще очакваме да се достигне при $a=1$. Следователно $k+l=\frac{1}{5}$. Остава да намерим стойността на параметъра k, за която неравенството $\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}\geq ka+\frac{1}{5}-k$ да е изпълнено за всяко $a\in(0;3)$. Понеже $2a^2-6a+9>0$ за всяко a, нашето помощно неравенство е еквивалентно със следното:

$$4a^2-12a+9\geq\left(k+\frac{1}{5}-k\right)\left(2a^2-6a+9\right)$$

или

$$2ka^3-\left(8k+\frac{18}{5}\right)a^2+\left(15k+\frac{54}{5}\right)a-\left(9k+\frac{36}{5}\right)\le 0.$$

Лесно се вижда, че сборът от коефициентите на горния многочлен е равен на 0, което означава, че $a=1.$ е негов корен (впрочем именно по тази причина избрахме $l=\frac{1}{5}-k$). За да е вярно горното неравенство, очевидно числото 1 трябва да е негов двоен корен (в противен случай, многочленът ще си смени знака при $a=1.$). Но $2ka^3-\left(8k+\frac{18}{5}\right)a^2+\left(15k+\frac{54}{5}\right)a-\left(9k+\frac{36}{5}\right)=$

$$(a-1)\left(2ka^2-\left(6k+\frac{18}{5}\right)a+9k+\frac{36}{5}\right).$$

Разлагането може да се извърши непосредствено или чрез схемата на Хорнер. За да бъде числото 1 двоен корен ще имаме $2k-6k-\frac{18}{5}+9k+\frac{36}{5}=0$ или $k=-\frac{18}{5}.$ Тогава $l=\frac{1}{5}-\left(-\frac{18}{5}\right)=\frac{23}{5}$ и вече лесно се проверява верността на неравенството $\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}\ge\frac{23}{25}-\frac{18}{25}a$ например чрез разкриване на скобите и разлагане на получения израз на множители.Понеже знаем, че числото 1 е двоен корен, получаваме , че неравенството е еквивалентно с $-\frac{18}{5}(a-1)^2(2a+1)\le 0$, което е валидно за всяко $a>0.$

Сега вече можем да приложим полученото неравенство и за b и c :

$$\frac{4b^2-12b+9}{2b^2-6b+9}\ge\frac{23}{25}-\frac{18}{25}b \quad \text{и} \quad \frac{4c^2-12c+9}{2c^2-6c+9}\ge\frac{23}{25}-\frac{18}{25}c$$

и събираме тези три неравенства. Имаме

$$\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}+\frac{4b^2-12b+9}{2b^2-6b+9}+\frac{4c^2-12c+9}{2c^2-6c+9}\geq$$

$$\left(\frac{23}{25}-\frac{18}{25}a\right)+\left(\frac{23}{25}-\frac{18}{25}b\right)+\left(\frac{23}{25}-\frac{18}{25}c\right)=$$

$$3.\frac{23}{25}-\frac{18}{25}(a+b+c)=\frac{69}{25}-\frac{18}{25}.3=\frac{69-54}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}.$$

С това неравенството е доказано.

Главният момент в това доказателство се прояви, когато класическите аргументи на анализа на една променлива "отказаха" да действат и тогава търсенето на помощно неравенство от даден вид се оказа решаващо. Това определено оправдава по-сложните доказателства, които сме срещали до сега – вероятно без взаимодействията на отделните величини е невъзможно доказването на такова неравенство, а привличането на подходяща линейна функция, която покрива действието на отделните събираеми в ляво, е повече от ползотворно. Критиката, която бе предявена към математическия анализ, определено е неоснователна. Наистина въвеждането на подходяща линейна функция е водещо средство за математическия анализ, чиято главна цел е да замени изследването на функциите към по-прости такива. В нашия случай си помагаме с линейна функции.

Да се докаже, че ако $a>0, b>0, c>0$, *то*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

Задачата е публикувана в сп. "Математика и информатика", бр. 4, 2003 г. Същата е давана на олимпиада в САЩ)

Ще предложим същия метод за доказване на неравенства и в този случай. Отново без ограничение, ще приемем, че $a+b+c=3$(ясно вече с каква цел). Тогава

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}=\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}.$$

Отново се опитваме да привлечем помощно неравенство от вида $\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}\le ka+l,$ където k и l са неопределени коефициенти и равенството да се достига само при $a=1$..Тогава $k+l=\frac{8}{3}.$

Сега търсим стойността на параметъра k, така че многочленът $\left(ka+\frac{8}{3}-k\right)\left(3a^2-6a+9\right)-\left(a^2+6a+9\right)$ да има двоен корен 1. Ще използваме правилото на Хорнер за разлагане на множители

	$3k$	$7-9k$	$15k-22$	$15-9k$
1	$3k$	$7-6k$	$9k-15$	0
1	$3k$	$7-3k$	$6k-8$	

Следователно $6k-8=0$, откъдето $k=\frac{4}{3}.$ Тогава $l=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3},$

а при $k=l=\frac{4}{3}$, ще имаме (да отбележим също, че $3a^2-6a+9>0$)

$$\frac{4}{3}(a+1)\left(3a^2-6a+9\right)-\left(a^2+6a+9\right)=(a-1)^2(4a+3)\ge 0,$$

за всяко положително a. По такъв начин открихме помощното неравенство $\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9} \le \frac{4}{3}(a+1)$, което заедно с $\frac{b^2+6b+9}{3b^2-6b+9} \le \frac{4}{3}(b+1)$ и $\frac{c^2+6c+9}{3c^2-6c+9} \le \frac{4}{3}(c+1)$ дава

$$\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}+\frac{b^2+6b+9}{3b^2-6b+9}+\frac{c^2+6c+9}{3c^2-6c+9} \le \frac{4}{3}(a+b+c)=\frac{4}{3}.6=8.$$

В подкрепа на предложената идея ще разгледаме още една задача от спомената по-горе книга на Седракян и Авоян.

Да се докаже, че ако $a>0, b>0, c>0$, *то*

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \ge \frac{3}{4}.$$

Отново приемаме, че $a+b+c=3$. Тогава

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}=\frac{a^2}{a^2+ab+ac+bc}=\frac{a^2}{3a+bc} \ge \frac{a^2}{3a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}=$$

$$\frac{a^2}{3a+\left(\frac{3-a}{2}\right)^2}=\frac{4a^2}{a^2+6a+9}.$$

Тук използвахме неравенството между средното аритметично и средното геометрично за две числа $bc \le \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$. Сега вече можем да продължим по познатия начин. Искаме да е налице неравенство от вида $\frac{4a^2}{a^2+6a+9} \ge ka+l$, което да е в сила за всяко $a \in (0;3)$, а равенство да се достига при $a=1$. Тогава $k+l=\frac{1}{4}$ или $l=\frac{1}{4}-k$. Образуваме си многочлена

$$\left(ka+\frac{1}{4}-k\right)\left(a^2+6a+9\right)-4a^2=ka^3+\left(5k-\frac{15}{4}\right)a^2+\left(3k+\frac{6}{4}\right)a+\frac{9}{4}-9k,$$

който разлагаме на множители с помощта на схемата на Хорнер.

	k	$5k-\frac{15}{4}$	$3k+\frac{6}{4}$	$\frac{9}{4}-9k$
1	k	$6k-\frac{15}{4}$	$9k-\frac{9}{4}$	0
1	k	$7k-\frac{15}{4}$	$16k-\frac{24}{4}$	

Следователно търсената стойност за k намираме от равенството $16k-\frac{24}{4}=0$ или $k=\frac{3}{8}$, което показва, че е налице разлагането

$$\frac{3}{8}a^3+\left(\frac{15}{8}-\frac{15}{4}\right)a^2+\left(\frac{9}{8}+\frac{6}{4}\right)a+\frac{9}{4}-\frac{27}{8}=$$

$$\frac{3}{8}a^3-\frac{15}{8}a^2+\frac{21}{8}a-\frac{9}{8}=\frac{3}{8}\left(a^3-5a^2+7a-3\right)=\frac{3}{8}(a-1)^2(a-3).$$

Така полученият израз в интервала $(0;3)$ приема само неположителни стойности, т.е. в сила е неравенството $\frac{4a^2}{2a^2+6a+9}\geq\frac{3}{8}a-\frac{1}{8}$ за всяко $a\in(0;3)$. Аналогично ще имаме

$$\frac{4b^2}{b^2+6b+9}\geq\frac{3}{8}b-\frac{1}{8} \quad \text{и} \quad \frac{4c^2}{c^2+6c+9}\geq\frac{3}{8}c-\frac{1}{8}, \quad \text{откъдето}$$

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq$$

$$\frac{4a^2}{a^2+6a+9}+\frac{4b^2}{b^2+6b+9}+\frac{4c^2}{c^2+6c+9}\geq$$

$$\left(\frac{3}{8}a-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}b-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}c-\frac{1}{8}\right)=$$

$$\frac{3}{8}(a+b+c)-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}.3-\frac{3}{8}=\frac{3}{4}.$$

Следващата задача е от същата книга на Седракян и Авоян.

Да се докаже, че ако $a>0, b>0, c>0$ *и* $a^2+b^2+c^2=3$, *то*

$$\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab}\geq\frac{3}{2}.$$

Упътване. Имаме $\frac{1}{1+bc}\geq\frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{2}}=\frac{2}{5-a^2}$. Полагаме $a^2=t$ и

търсим помощно неравенство от вида $\frac{2}{5-t^2}\geq kt+l$, което да е в сила за всяко $t\in(0;3)$ и равенство да се достига при $t=1$. Това можете да постигнете чрез познатите ни средства или като се възползвате от тъждественото неравенство $(t-1)^2\geq 0$ като го преработим във вида $\frac{2}{5-t}\geq\frac{t}{8}+\frac{3}{8}$, откъдето $\frac{2}{5-a^2}\geq\frac{a^2}{8}+\frac{3}{8}$.

Ето още една подходяща за този метод задача за упражнение.

Да се докаже, че ако $a>0, b>0, c>0$, *то*

$$\frac{a^2}{(2b+c)(2c+b)}+\frac{b^2}{(2c+a)(2a+c)}+\frac{c^2}{(2a+b)(2b+a)}\geq\frac{1}{3}.$$

Упътване. Приемете, че $a^2+b^2+c^2=3$, откъдето $\frac{a^2}{5\frac{b^2+c^2}{2}+2b^2+2c^2}=\frac{2a^2}{9b^2+9c^2}=\frac{2a^2}{27-9a^2}$. Да положим сега $a^2=t$

и ще потърсим помощно неравенство от вида $\frac{2t}{27-9t} \geq kt + l$, което да е валидно за всяко $t \in (0;3)$ и в което равенството да се достига при $t = 1$.

С помощта на позната ви техника достигаме до неравенството $\frac{2t}{27-9t} \geq \frac{3t-1}{18}$, което от своя страна води до неравенството $\frac{a^2}{(2b+c)(2c+b)} \geq \frac{3a^2-1}{18}$, откъдето лесно следва и доказателството на даденото.

Приведените в тази статия доказателства са нови и съществено се различават от дадените в книгите. Всяко от разгледаните неравенства допуска и други доказателства, но считаме, че това не омаловажава предложеният подход и той може да бъде ефективен за широк клас неравенства.

История на математиката и евристиката

Историята на математиката е изпъстрена с множество от интересни моменти, включването на които придават особен чар на преподаването на решаване на задачи. Историята на математиката е преди всичко история на развитието на идеите при оформяне на новите понятия и теории. Тя е свързана с процесите на изграждането на математиката и за голяма част от откритията в нея съществена роля играе историческият момент. Така например ако си поставен въпроса: "Кое е математическото откритие, което бележи една от най-характерните промени в съвременния свят Възраждането на античната култура?" (защото не е прилично математиката да не фигурира в Ренесанса), отговорът трябва да се търси в появата на принципно нова идея, която не се е срещала в античния свят, а през съответната епоха, почти в едно и също време, тази идея "избухва" на няколко места. Анализът на историческите факти показва, че това може да е само откриването на формулата за решаване на уравненията от трета степен. Не е случайно, че тази формула е била открита от няколко души, независимо един от друг, именно в Италия, страна, която е люлката на Ренесанса. Новата формула (формулата на Кардано) вкарва в математиката съвършено ново тълкуване на комплексните числа, нещо, което въобще не можем да открием в съчиненията на античните математици. Разсъждения от типа, който приведохме, повишават интереса към изучаваната материя и по този начин математиката става все повече привлекателен предмет.

По-нататък ще разгледаме някои ситуации, в които историческият елемент се проявява в прилагането на някои евристични техники.

Теорема на Помпею-Обрешков. В началото на миналия век румънският математик Димитрие Помпею формулира следната теорема.

Нека ABC е равностранен триъгълник и M е точка от равнината му. Тогава с помощта на отсечките MA, MB, MC може да се построи триъгълник. Този триъгълникът е изроден тогава и само тогава, когато точката M лежи на описаната около триъгълника ABC окръжност.

Тази теорема е станала и много популярна в нашата страна и в резултат на това се е появило следното обобщение.

Нека ABC е произволен триъгълник и M е точка от равнината му. Тогава числата $MA.BC$, $MB.CA$ и MC, AB, разглеждани като дължини на отсечки, могат да са дължини на страни на триъгълник. Този триъгълник е изроден тогава и само тогава, когато точката M лежи на описаната около триъгълника ABC окръжност.(теорема на Обрешков)

Тази теорема очевидно е обобщение на теоремата на Помпею, защото в частният случай на равностранен триъгълник последната следва веднага. Доказателството на теоремата на Обрешков ще извършим с помощта на полезната тактика на приложение на комплексните числа в геометрията.

От тъждеството $(m-b)(a-c)+(m-c)(b-a)=(m-a)(b-c)$ и неравенството на триъгълника за комплексните числа имаме $|(m-b)(a-c)|+|(m-c)(b-a)|\geq|(m-b)(a-c)+(m-c)(b-a)|=|(m-a)(b-c)|$, което показва, че трите разглеждани числа могат да са дължини на

страни на триъгълник. Да разгледаме въпроса за равенството. Без ограничение можем да предположим, че точката M съвпада с началото на координатната система, т.е. $m=0$. Тогава равенството ще е налице ако съществува положително t, такова че $b(a-c)=tc(b-a)$, откъдето

$$\frac{c-a}{b-a}=-t\frac{c}{b}=-t\frac{c-0}{b-0},$$

т.е. $\sphericalangle BAC+\sphericalangle BMC=180°$. Следователно точката M лежи на описаната около триъгълника окръжност. Така приведеното доказателство не е сложно. По-скоро е интересно да отговорим на въпроса каква евристика е приложил видният български математик Н. Обрешков, за да достигне до такова обобщение.

Хипотеза на Ферма и решението на Ойлер. Пиер Ферма, правист по образование и занаят, е известен и с това, че е бил голям любител на математиката. Определено на него се дължат редица интересни идеи, без които съвременната математика не би имала този си облик. Най-голяма популярност от заниманията на Ферма в областта на математиката са тези в теорията на числата. Няма да се спираме на така наречената Велика (последна) теорема на Ферма, а ще обърнем внимание на една по-забавна част от неговите занимания с теорията на числата. Разказват, че като пресмятал числата от вида $2^{2^n}+1$, той пресметнал, че получените стойност при $n=0,1,2,3,4$, които са съответно 3, 5, 17, 257, 65537, се оказали прости числа. По онова време, когато концепцията за доказателство не е била толкова прецизна, колкото е сега и Ферма изказал хипотезата, че всички числа от разглеждания вид са прости. Сто години след като тази хипотеза е била изказана, големият математик Леонард Ойлер установява, че хипотезата на Ферма не е вярна, а опровергаващият

пример е повече от загадъчен. Ойлер показва, че още при $n=5$ хипотезата се опровергава, защото числото $2^{32}+1$ се дели на 641. Дали обаче този загадъчен факт е резултат на гениалната интуиция на Ойлер или той е достигнал до него в резултат на някои съображения от теорията на нас не ни е известно. Без да подценяваме гения на Ойлер ще се опитаме да обясним как той вероятно е достигнал до това, отново да кажем загадъчно, число 641 и защо именно той е извършил това. Ще започнем обаче с доказателството на факта, че числото 641 е делител на $2^{32}+1$. Последното е изключително изящно и вероятно произхожда от самия Ойлер. От равенствата $641=16+625=2^4+5^4$ и $641=1+640=1+5.2^7$ следват сравненията $2^4\equiv -5^4 \pmod{641}$ и $5.2^7\equiv -1 \pmod{641}$. Повдигаме двете страни на последното в четвърта степен и получаваме $5^4.2^{28}\equiv 1 \pmod{641}$. Заместваме от първото сравнение 5^4 с -2^4 и получаваме, че $2^{32}\equiv -1 \pmod{641}$, с което твърдението е доказано. По времето на Ферма не са били известни понятия като индикатор на едно естествено число, показател по определен модул, както и една теорема, която днес носи неговото име – теоремата на Ойлер-Ферма. Всичко това математиката дължи именно на Ойлер. Да се опитаме сега да опровергаем хипотезата на Ферма със средствата, с които е разполагал Ойлер. Ще потърсим някакъв прост делител p на числото $2^{32}+1$. Тогава $2^{32}\equiv -1 \pmod{p}$, откъдето $2^{64}\equiv 1 \pmod{p}$. Последните две сравнения показват, че показателят на числото 2 по модул p е 64. Следователно от Малката теорема на Ферма можем да заключим, че 64 е делител на $p-1$, т.е. за търсения прост делител ще имаме $p=64k+1$. Да запишем първите няколко числа от този вид: 65, 129, 193,

257, 321, 385, 449, 513,577, 641. Очевидно числата 65, 129, 321, 385, 513 не са прости. Ще разгледаме останалите.

Нека $2^{32} \equiv -1(\mathrm{mod}\,193)$. От представянето $193 = 64.3 + 1$ следва $3.2^6 \equiv -1(\mathrm{mod}\,193)$. Повдигаме двете страни на последното в пета степен и получаваме $243.2^{30} \equiv -1(\mathrm{mod}\,193)$. Понеже $243 = 193 + 50$, то $25.2^{31} \equiv -1(\mathrm{mod}\,193)$, откъдето $25.2^{32} \equiv -2(\mathrm{mod}\,193)$. Сега заместваме 2^{32} с -1 и получаваме, че $25 \equiv 2(\mathrm{mod}\,193)$, което не е вярно.

Приемаме, че $2^{32} \equiv -1(\mathrm{mod}\,257)$. От представянето $257 = 1 + 2^8$ следва $2^8 \equiv -1(\mathrm{mod}\,257)$. Повдигаме последното в четвърта степен и получаваме $2^{32} \equiv 1(\mathrm{mod}\,257)$, което е противоречие с $2^{32} \equiv -1(\mathrm{mod}\,257)$.

Нека $2^{32} \equiv -1(\mathrm{mod}\,449)$. Отново в стил Ойлер представяме $449 = 1 + 7.2^6$, откъдето $7.2^6 \equiv -1(\mathrm{mod}\,449)$ и повдигаме в пета степен $7^5.2^{30} \equiv -1(\mathrm{mod}\,449)$. Имаме $7^5 = 16807 = 37.449 + 194$, откъдето $97.2^{31} \equiv -1(\mathrm{mod}\,449)$ или $97.2^{32} \equiv -2(\mathrm{mod}\,449)$ и заедно с $2^{32} \equiv -1(\mathrm{mod}\,449)$ се получава, че $-97 \equiv -2(\mathrm{mod}\,449)$, което е противоречие.

Остава да приемем, че $2^{32} \equiv -1(\mathrm{mod}\,577)$ Представяме $577 = 9.64 + 1$, откъдето $3^2.2^{32} \equiv -1(\mathrm{mod}\,577)$. Повдигаме отново в пета степен и получаваме $3^{10}.2^{30} \equiv -1(\mathrm{mod}\,577)$.

Пресмятаме $3^{10} = 3^5.3^5 = 243.243 = 59049 = 102.577 + 195$. Сега $195.2^{30} \equiv -1(\mathrm{mod}\,577)$, откъдето $195, 2^{32} \equiv -4(\mathrm{mod}\,577)$ или $-195 \equiv -4(\mathrm{mod}\,577)$. Последното не е вярно и така получихме, че нито едно от възможните прости числа 193, 256, 449 и 577 не са делители на $2^{32} + 1$. Вероятно в опита си да “докаже” , че и следващото просто

число в редицата 641 също не е делител на $2^{32}+1$, Ойлер е достигнал до търсения контрапример. Изчисленията, приведени тук, не са сложни, но изискват "ойлерово" търпение (известно е съобщението за смъртта му гласяло: "Ойлер спря да диша и да изчислява") и са пример на една отлична комбинация от евристични стратегии. Дали точно така Ойлер е достигнал до избора на числото 641 може само да се предполага, но едно е ясно: Съвсем нормално е било Ферма да направи в този случай грешна хипотеза и съвсем нормално именно Ойлер да разреши този въпрос.

Примери на Хилберт от теорията на числата. Немският математик Давид Хилберт, един от най-великите математици за всички времена, е оставил огромно наследство от научни трудове и резултати. Струва си само да споменем епохалния му доклад на световния конгрес по математика, където той формулира 23 задачи, които трябваше да бъдат решени през изминалото столетие, известни като проблемите на Хилберт. Голяма част от тези проблеми бяха решени, а една част още очакват своето решение. Но не за тези велики проблеми на математиката ще стане дума в по нататък. Името на Хилберт се свързва с един пример от теорията на числата.

Пример на Хилберт. Разглеждаме множеството H (в чест на Хилберт) на естествените числа от вида $4n+1$, където n означава произволно цяло неотрицателно число. Това множество е затворено относно операцията умножение, т.е. произведението на всеки две числа от H е също от H.

Наистина $(4k+1)(4l+1)=16kl+4k+4l+1=4(4kl+k+l)+1$. Да наречем едно число от H псевдопросто, ако то няма делител от H, различен от 1 и самото число. Например всички прости числа от H са псевдопрости, като 5, 13, 17, 29 и т.н. Но наред с тях

псевдопрости са съставни числа като 9, 21, 33, 49, 77 и т.н. Тези числа имат нетривиални прости делители, но те не са елементи от H. Тъй като H е множество от числа, в което е дефинирана една асоциативна операция (такива множества се наричат полугрупи), естествено е да се постави по аналогия с естествените числа въпросът за разлагане на елементите на H в произведение на псевдопрости множители и дали това разлагане е еднозначно с точност до местата на самите множители. Например в множеството на естествените числа не правим разлика при разлагането на числото 15 като 3.5 или 5.3. Оказва се, че числото 693 се представя като произведение на псевдопрости числа по два съществено различни начина 693 = 9.77 = 21.33. Впрочем и читателят сам може да намери други подобни примери.

Нека си отговорим най-напред защо на Хилберт му е било нужно да въвежда този пример. Проблемът, за който става дума по-горе е свързан с изключително важната *Основна теорема на аритметиката*, според която всяко естествено число, по-голямо от 1, се представя еднозначно в произведение от прости числа. За множеството H, в което е дефинирана операцията умножение основната теорема не е вярна. Каква е причината за това? За целта ще отворим учебниците по теория на числата и ще прегледаме подробно доказателството на тази теорема. Съществен момент в това доказателство или пък в някои други еквивалентни на него играе едно разсъждение, което се свежда до твърдението, че ако едно число дели произведение на две числа и е взаимно просто с някой от множителите, то дели другия множител. Дали в H можем да докажем нещо аналогично на горния факт? Още веднъж поглеждаме в учебниците по теория на числата. Там това се доказва с помощта на

т.н. тъждество на Безу според което най-големият общ делител на естествените числа a и b се представя във вида $ua+vb$, където u и v са някакви цели числа. Да забележим знакът плюс (+) в тъждеството в H такъв знак е невъзможен. Да напомним, че H е само полугрупа и в нея не е дефинирана операцията събиране. Следователно примерът на Хилберт показва, че *Основната теорема на аритметиката* **не може да се докаже само с мултипликативни средства**, т.е. нужна е и операцията събиране. На пръв поглед – доста неочакван факт!

Историята с примера на Хилберт търпи интересно развитие. В началото на 70-те години на миналия век българският математик Стефан Додунеков публикува във Физико-математическото списание едно обобщение на примера на Хилберт. Няколко години по-късно през 1977 на Международната олимпиада по математика обобщението на Ст. Додунеков беше предложено като конкурсна задача, но от Нидерландия. На тази олимпиада българският участник Пламен Стефанов получи специална награда за особено оригиналното си решение. Да формулираме задачата, както е била дадена на самата олимпиада.

Задача от XIX МОМ. Нека n е дадено естествено число, по-голямо от 2. Да означим с V_n множеството от всички цели числа от вида $1+kn$, където $k=1,2,3,...$ Едно число $m \in V_n$ се нарича неразложимо във V_n, ако не съществуват цели числа p и q от V_n такива, че $m=p.q$. Да се докаже, че съществува число r от V_n, което може да се представи като произведение на неразложими във V_n множители по повече от един начин. (Различаващите се само по местата на множителите от V_n представяния се считат за еднакви.)

По това време не е било прието решенията на задачите от МОМ да се публикуват по списанията, така че ще направим следния коментар. Ако проследим доказателството на оригиналния пример на Хилберт, ще забележим, че се нуждаем от съставни числа, които са неразложими или все едно псевдопрости във V_n, които са произведения от по две истински прости числа, но които не са от V_n. Най-добре е тези числа да се от вида $-1+kn$, така че произведението на всеки две от тях да лежи във V_n. Ако използваме знаменитата теорема на Дирихле за аритметичната прогресия според която във всяка аритметична прогресия, съставена от естествени числа, на която разлика и първия член са взаимно прости, съдържа безбройно много прости числа в цитираните по-горе прогресии ще има безбройно много прости числа и съответните примери ще бъдат леко установени.

Твърдението за аритметичните прогресии е изказано най-напред като хипотеза още от Льожандр, но пълно доказателство дава немският математик Петер Густав Лежон Дирихле през 1837 г. Доказателството на тази теорема е било изключително комплицирано, при което се използват свойствата на аналитичните функции. В началото на миналия век датския математик Алте Селберг дава “елементарно” доказателство на теоремата на Дирихле в смисъл, че в доказателството се използват само интеграли от реални функции, т.е. без комплексен анализ.

На нас обаче не ни е нужна теоремата на Дирихле в пълната формулировка, а само за прогресии с първи член ± 1. Такова доказателство може да се намери в сп. “Математика” от 1979 г. в статия на Владимир Чуканов.

В един доклад на семинара по дидактическо моделиране Стефан Додунеков наред с многото и разнообразни проблеми постави някои задачи, свързани с обобщения и аналози на примерите на Хилберт. За да вникнем по-пълноценно в тях ще разгледаме някои определения. Ясно е, че примерът на Хилберт се отнася към идеологията на доказателството на основната теорема на аритметиката. Обърнахме внимание на адитивната структура на множеството на целите числа, т.е. наличието на операцията събиране. Самото доказателство се основава на тъждеството на Безу, което пък се получава от алгоритъма на Евклид за деление на целите числа с остатък. Такива множества се наричат *евклидови*. По такъв начин може да се установи, че наличието на евклидовост води до теорема за еднозначност на разлагане на неразложими множители.

Обратното обаче не е точно така, т.е. има примери на полугрупи, в които имаме еднозначност на разлагане (такива полугрупи се наричат *гаусови*, в чест на друг не по-малко велик немски математик Карл Гаус). Изучаването на гаусовите полугрупи представлява особен интерес, защото те се междинно звено между алгебрата и теорията на числата. Най-близкото до множеството на целите числа по отношение на свойството разлагане на неразложими множители е множеството от полиноми на една променлива. В това множество също е в сила алгоритъма на Евклид и следователно е налице аналог на основната теорема за еднозначност на разлагането. Тази прилика даде основание на Стефан Додунеков да постави въпроса за съществуване на негаусова полугрупа от полиноми на една променлива. Това би бил “пример на Хилберт “ за аритметиката на полиномите. Построяването на такива полугрупи ще извършим по аналогия с вече натрупания опит с неразложимите множители.

Пример на Хилберт за полиноми на една променлива. Нека V е множеството от полиноми на една променлива над полето Q на рационалните числа със свободен член 1, т.е. полиномите от вида $1+xf(x)$, където $f(x)$ описва множеството на всички полиноми с рационални коефициенти. Ще докажем, че V е негаусова полугрупа. Първо, множеството V е полугрупа, защото ако $1+xf(x)\in V$ и $1+xg(x)\in V$, то $(1+xf(x)).(1+xg(x))=1+xh(x)\in V$. Да разгледаме сега полинома $(x-1)^2\left(\left(x^2-1\right)^2-x^2\right)$. Той е представен като произведение на полинома $f(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$ и на полинома $g(x)=\left(x^2-1\right)^2-x^2=x^4-3x^2+1$. И двата полинома принадлежат на множеството V и са неразложими във V. Полиномът $f(x)$ има единствено разлагане като квадрат на $x-1$ и следователно е неразложим във V. Освен това полиномът $g(x)$ = x^4-3x^2+1 по теоремата за еднозначност на разлагане на полиноми на една променлива дава разлагането $\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+x-1\right)$, което е разлагане в произведение на неразложими над Q полиноми. Следователно $g(x)$ е неразложим във V полином. Но разглежданият полином $(x-1)^2\left(\left(x^2-1\right)^2-x^2\right)$ допуска и друго разлагане във V, а именно $\left(x^3-2x+1\right)\left(x^3-2x^2+1\right)$, защото $x^3-2x+1=(x-1)\left(x^2+x-1\right)$ и $x^3-2x^2+1=(x-1)\left(x^2-x-1\right)$, а от теоремата за еднозначност на разлагането следва, че тези два полинома са неразложими във V.

Освен множеството на естествените числа и множеството на полиномите на една променлива, в които е в сила теоремата на

Евклид за деление с остатък, и следователно ще е налице теорема за еднозначно разлагане в произведение на неразложими множители, можем да посочим и други множества от този тип. Много интересен и важен пример е множеството от целите гаусови числа. Това са числата от вида $a+bi$, където a и b са произволни цели числа, а i е имагинерната единица, т.е. $i^2=-1$. В това множество е в сила основната теорема на аритметиката и съществува описание на простите числа в него. Разглеждаме множеството $G=\{a+bi, a\equiv 1(\bmod 4); b\equiv 0(\bmod 2)\}$. Последното е затворено относно умножението на комплексните числа, което се проверява непосредствено. Ще докажем, че G е негаусова полугрупа. Да разгледаме числото $-27-36i$ - защо именно това число сме избрали, ще обясним по-нататък. Забелязваме, че $-27-36i=9(-3-4i)=9(-1+2i)^2$ и освен това $-27-36i=(-3+6i)^2$. От теорията на целите гаусови числа знаем, че всички прости числа от вида $4k+3$ са прости и като гаусови. Следователно числото 3 е просто гаусово число, а числото 9 е неразложимо число в G. Освен това, пак от теорията на целите гаусови числа знаем, че числата от вида $a+bi$, където a и b са цели числа и за тях числото a^2+b^2 е просто число от вида $4k+1$ са прости, т.е. неразложими, като гаусови, откъдето и числото $-3+6i$ е неразложимо в G. Така намерихме число, което има две различни представяния като произведение на неразложими числа в G. Следователно G е пример на негаусова подполугрупа на мултипликативната група на целите гаусови числа. Нещо повече, приведения пример показва, че в G има числа, които са точни квадрати и се представят в произведение на две различни неразложими в G числа. Идеята за разглеждане на

подполугрупата G идва като аналогия от разгледаните примери – преди всичко от примера на Хилберт. За целта трябва да се построи пример на затворено относно операцията умножение подмножество, където "разложимостта" да се скрие в съответната теорема за разлагане на неразложими множители в голямото множество. При построяването на всеки от примерите от основно значение е познаването на аритметичните свойства на разглежданите множества. По аналогичен начин може да бъдат построени такива полугрупи и в други числови пръстени като някои от популярните квадратични разширения на множеството на целите числа, за които е в сила основната теорема на аритметиката.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Engel, A. Problem – Solving Strategies, 1990
2. Zeitz, P. The Art and Craft of Problem Solving, 1988
3. Identification, Motivation and Support of Mathematical Talents in European Schools, Manual, volumes 1, 2 & 3, Math.eu Projects.
4. Silver, E. Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, Lawrence Erlbaum Associates, 1985.
5. Cockcroft, W. H. Mathematical Counts: Report of the Committee if Inquiry Into the Teaching of Mathematics under the Chairmanship of Dr. W.H. Cockcroft, London, Her Majesty's Stationary Office, 1982
6. Polya, G. How to solve it, Princeton University Press , 1946
7. Polya, G. Mathematics and Plausible Reasoning , Princeton University Press , 1954
8. Polya, G. Mathematical Discovery, John Wiley & Sons, 1965
9. Polya, G. and J. Kilpatrick. The Stanford Mathematics Problem Book with Hints and Solutions, Columbia University, 1974
10. Kilpatrick, J. Is Teaching Teachable? George Polya's views on the Training Mathematics Teachers, A Problem Solving Focus, MCMT, 1987, 85-97
11. Freudenthal ,H. Revisiting Mathematics Education, China Lectures, Kluwer Academic Publishers, 1991
12. Schoenfeld ,A. Mathematical Problem Solving, Academic Press, Mew York, 1985
13. Andreescu, T. and R. Gelca, Mathematical Olympiad Challenges. Birkhauser, 2009

14. Andreescu, T. and B. Enescu, Mathematical Olympiad Treasures, Birkhauser, 2002
15. Andreescu, T. and D. Andrica Complex Numbers from A to … Z, Birkhauser, 2004
16. Anderson, J. R. Cognitive Psychology and its Implication, 3 rd ed. Freeman, New York, 1990
17. Sharigin I. Where do Problems arise? Two articles and two hundred Problems, M. 2000
18. Niculescu, L. Metoda reducerii la absurd , GIL, 2007
19. Drimbe, M., Inegalitati – idei si metode, GIL, 2003
20. Epp S. The Role of Logic in Teaching Proof, Amer. Math. Monthly, v.110, № 10, 2003, 886-899.
21. Sierpinnski, W. Elementary Theory of Numbers, PAN, 1963
22. Серпинский, В. 260 задач по элементарной теории чисел, Просвещение, 1968.
23. Алфутова, Н. и А. Устинов Алгебра и теория чисел, Сборник задач для математичеаских школ, Москва, МЦМНО, 2005
24. Седракян, Н. и А. Авоян, Неравенства. Методы доказательства, Физматлит, 2002
25. Толпыго, А. Тысяча задач международного турнира городов, Москва, МЦМНО, 2009
26. Горбачев, Н. Сборник олмпиадных задач по математике, Москва, МЦМНО, 2004
27. Канель-Белов, А. и А. Ковальджи, Как решают нестандартные задачи, Москва, МЦНМО, 2004
28. Тонов, И. Приложения на комплексните числа в геометрията, ДИ “Народна просвета”, 1988
29. Тонов, И. Срещи с алгебрата, ДИ “Народна просвета”, 1984

30. Тонов, И. Отново за Ферма и Ойлер, Математика и информатика, 2005, кн. 6, 76-77.
31. Тонов, И. Един пример на Хилберт и някои идеи около него, Математика и информатика, 2010, кн.5, 31-33.
32. Тонов, И. Симетрични хомогенни неравенства, Математика и информатика, кн.4, 2005,15-20
33. Тонов, И. Обучението на учителите по математика чрез решаване на задачи, Математика и информатика, 2005, кн.3, 5-10.
34. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. С какво да започнем?, Математика, кн.6, 2004, 2-6.
35. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. Избор на стратегия, Математика кн.1,2005, 2-6
36. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи, Стратегиите помагат… Математика, кн.2, 2005, 2-5
37. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. Стратегиите се развихрят, Математика, кн.3,2005, 2-7.
38. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. Допускане на противното, Математика, кн.4, 2005, 2-6.
39. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. Математическа индукция, Математика, кн.5, 2005,8-14.
40. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. Максималният принцип, Математика,кн.6, 2005, 2-7.
41. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. Да разгледаме случаи, Математика, кн.1, 2006, 3-6
42. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. Възможно, невъзможно..., Математика, кн.2, 2006 ,7-12.
43. Тонов, И. Някои забравени или непознати задачи. Задачи за “изтощаване”, Математика, кн.6, 2006, 2-5.

44. Тонов, И. Теорема на Щайнер-Лемус или още нещо за допускане на противното, Математика, 2009, кн.6, 2-8.
45. Тонов, И. Симетрични хомогенни неравенства, Математика и информатика, кн.4, 2005,15-20
46. Тонов, И. Обучението на учителите по математика чрез решаване на задачи, Математика и информатика, 2005, кн.3, 5-10.

Съдържание

1. Увод ……..... 2
2. Що е математическа задача …… 11
3. Решаване на задачи (Problem Solving)…….. 17
4. Как се преподава решаване на задачи ……... 28
5. Обучение на учителите чрез решаване на задачи …… 37
6. Моделът на Поя. Четвъртата фаза ……. 45
7. Втората фаза от модела на Поя. Евристични стратегии …….. 58
8. Задачи и математическо мислене. Ребуси …… 69
9. Да започнем да решаваме задачи …….. 80
10. Да използваме свойствата на числата …….. 88
11. Методът на пробите и грешките или пълното изчерпване … 94
12. Разглеждане на случаи…….. 106
13. Допускане на противното …… 112
14. Допускане на противното в геометрията
Теорема на Щайнер-Лемус ……..……. 122
15. Принцип на математическата индукция ……. 131
16. Математическа индукция и разглеждане на случаи
и разглеждане на случаи. Една комбинация от стратегии …….. 146
17. Отново за математическата индукция.
Приложения в различни области …… 153
18. Междинната стъпка ……. 160
19. Методът на неопределените коефициенти и
неравенството на КБШ ……. 174
20. Хомогенни неравенства ……. 180
21. История на математиката и евристиката ……. 189
22. Литература ……. 202