ВИСША АТЕСТАЦИОННА КОМИСИЯ
СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Веселин Андреев Гушев

Квадратурни и кубатурни формули

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен **„Доктор“** по научна специалност **01.01.09 „Изчислителна математика“**

научен ръководител: доц. д.м.н. Гено Николов
официални рецензенти: 1. проф. д.м.н. Стефка Димова
2. ст. н. с. II ст. д-р Андрей Андреев

София, 2008 г.

Дисертационният труд е обсъден и препоръчан на СНС по приложна математика и механика при ВАК за разкриване на процедура за защита на разширено заседание на катедра „Числени методи и алгоритми“, проведено на 12.06.2008 г.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 26.11.2008 г. (сряда) от 14.00 часа в зала 510 на Института по механика при БАН.

Автор: Веселин Андреев Гушев
Заглавие: Квадратурни и кубатурни формули
Специалност: 01.01.09

В памет на баща ми

Увод

В много задачи от практиката се налага пресмятането на определени интеграли от вида

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx,$$

понеже чрез тяхната стойност могат да се изразяват лица на области, лица на околната повърхнина и обеми на ротационни тела, дължини на криви и т.н.

В относително малък дял от случаите, стойността на този интеграл може да бъде пресметната точно дори ако знаем явния вид на подинтегралната функция.

За приближеното му пресмятане обикновено се използват така наречените *квадратурни формули* Q (формули, които пресмятат лице), в които могат да участват стойности както на подинтегралната функция така и на някои нейни производни, т.е. фукнционали от вида

$$Q[f] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\nu_i - 1} a_{ij} f^{(j)}(x_i), \tag{1.1.1}$$

където $\{x_i\}_{i=1}^n$ се наричат възли на Q, естествените числа $\{\nu_i\}_{i=1}^n$ определят техните кратности, като $\max\limits_i\{\nu_i\} = \nu$, а $\{a_{ij}\}$ са коефициентите на Q. В повечето случаи се предполага, че $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$.

Свободните параметри на квадратурната формула Q често се избират така, че тя да бъде точна (да пресмята точно стойността на интеграла) за определен клас от функции, обикновено за класа на алгебричните полиноми до някоя степен включително.

За такива квадратурни формули се дефинира понятието *алгебрична степен на точност* на квадратурната формула Q (ACT (Q)) като най-голямото цяло неотрицателно число m, за което формулата е точна за всички полиноми от степен ненадминаваща m.

Така за функционала на грешката $R[Q; f] := I[f] - Q[f]$ на квадратурната формула имаме

$$R[Q; f] = 0, \text{ ако } \ f \in \pi_m, \ \text{ и } \ R[Q; f] \neq 0, \text{ ако } \ f \in \pi_{m+1} \setminus \pi_m,$$

където с π_m сме отбелязали класа от всички алгебрични полиноми на една променлива с реални коефициенти от степен по-малка или равна на m

$$\pi_m = \left\{ \sum_{k=0}^{m} a_k t^{m-k}, a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

В едномерния случай съществува добре развита теория за оценка на грешката на квадратурни формули, в случаите когато подинтегралната фукция принадлежи на класовете на Соболев

$$W_p^r[a,b] := \left\{ f \in C^{r-1}[a,b] : f^{(r-1)} \text{абс. непр. в } (a,b), \|f^{(r)}\|_{L_p[a,b]} < \infty \right\},$$

където с

$$\|f\|_{L_p[a,b]} := \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ и } \|f\|_{L_\infty[a,b]} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

са означени съответните $L_p[a,b]-$*норми* в пространствата от функции

$$L_p[a,b] := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

за $1 \le p < \infty$, и

$$L_\infty[a,b] := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty \right\}.$$

Тази теория се базира на интегралното представяне на специален клас от линейни функционали с ядра на Пеано, с чиято помощ могат да се получат точни оценки за грешката на съответната квадратурна формула.

В сила е следният класически резултат на Пеано.

Теорема 2.1.1 (Пеано) *Нека $\mathcal{L}$ е произволен линеен функционал, дефиниран върху пространството $W_1^r[a,b]$, който се анулира върху множеството π_{r-1}. Тогава за $\mathcal{L}$ е в сила следното представяне*

$$\mathcal{L}[f] = \int_a^b K_r(t) f^{(r)}(t) dt,$$

където

$$K_r(t) = \mathcal{L}\Big[\frac{(\cdot - t)_+^{r-1}}{(r-1)!}\Big], \quad u_+ = \max\{u, 0\}.$$

Като приложим Теоремата на Пеано към остатъка $R[Q;f] = I[f] - Q[f]$ на квадратурна формула Q, получаваме

Следствие 2.1.1 *Нека Q е квадратурна формула от вида* (1.1.1) *с $ACT\,(Q) = m$, където $\nu \le r \le m+1$. Ако $f \in W_1^r[a,b]$, то имаме следното представяне за грешката на квадратурната формула Q:*

$$R[Q;f] = \int_a^b K_r(Q;t) f^{(r)}(t)\, dt, \tag{2.1.2}$$

където

$$K_r(Q;t) = R\Big[\frac{(\cdot - t)_+^{r-1}}{(r-1)!}\Big] \tag{2.1.3}$$

е r-тото ядро на Пеано *за квадратурната формула* Q.

Ако квадратурната формула Q е от вида (1.1.1) и $ACT\,(Q) \geq r-1$, то за функции f от класа на Соболев $W_p^r[a,b]$ може да бъде оценена грешката $R[Q;f]$ на квадратурната формула Q.

Неравенството на Хьолдер, приложено към интегралното представяне от равенство (2.1.2) дава следната *точна оценка на грешката*

$$|R[Q;f]| \leq c_{r,p}(Q) \|f^{(r)}\|_{L_p[a,b]}, \tag{2.1.4}$$

$$c_{r,p}(Q) = \|K_r(Q;\cdot)\|_{L_q[a,b]}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Трябва да отбележим, че по принцип не е лесно да бъдат пресметнати точните стойности на константите на Пеано $c_{r,p}(Q)$ дори в най-често използваните случаи $p = 1, 2$ и ∞.

Изключение при $p = \infty$ прави случаят, когато квадратурната формула има ядро на Пеано с постоянен знак за $t \in [a,b]$, т.е. когато Q е *дефинитна квадратурна формула от ред* r. Тогава след прилагане на теоремата за средните стойности в равенство (2.1.2) получаваме

$$R[Q;f] = f^{(r)}(\xi) \int_a^b K_r(Q;t) dt, \text{ за някое } \xi \in (a,b), \tag{2.1.5}$$

така за константата на грешката имаме $c_{r,\infty}(Q) = \left| R\left[Q; \frac{(\cdot)^r}{r!}\right]\right|$.

От (2.1.5) можем да определим знака на грешката $R[Q;f]$ в случай, че освен знакът на $K_r(Q;t)$ и знакът на $f^{(r)}$ също е постоянен в (a,b), т.е. дефинитните квадратурни формули при постоянен знак на $f^{(r)}$ в (a,b) задават *едностранни приближения* за стойността на интеграла $I[f]$.

Свойства като дефитност и монотонност при редици от квадратурни формули често се използват в численото интегриране за получаване на апостериорни оценки на грешката, както и за правила за прекратяване на изчисленията (вж. [6], [7], [8] и цитираната в тях литература).

По-сложно стоят нещата при пресмятането на интеграли от по-висок ред, например за пресмятането на интеграли от вида

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} f(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x}) \quad \text{или} \quad \int\limits_{\Gamma} f(\mathbf{x})d\,l(\mathbf{x}),$$

където $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ е d- мерен вектор, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ е произволна област, а Γ е произволна крива в $\mathbb{R}^d$.

Трудностите в многомерния случай възникват поради многообразието на областите на интегриране и поради наличието на различни видове повърхнинни интеграли.

Тук отново за приближено пресмятане на съответните интеграли се използват функционали, наречени *кубатурни формули* (формули, които пресмятат обем).

В многомерния случай, ако искаме дадена кубатурна формула да бъде точна за някой клас от функции, трябва да използваме голям брой стойности на функцията. Това се дължи на факта, че в $\mathbb{R}^d$, например пространствата $\pi_n(\mathbb{R}^d)$ от алгебричните полиноми на d променливи от тотална степен n бързо увеличават размерността си с нарастването на n.

Трябва да отбележим още, че при кубатурните формули нито постигането на висока алгебрична степен на точност, нито оценката на грешката е тривиална задача. За да бъде постигнато това понякога се използва информация от нестандартен тип, която е може би „по-естествена“ от точковата за пресмятане на интеграли от по-висок ред.

В настоящата дисертация са получени някои квадратурни и кубатурни формули, базиращи се на такава информация. По-конкретно, в Глава 4 са получени квадратурни формули за приближение на интеграла на нормалната вероятност; в Глава 2 се изучават кубатурни формули за правоъгълна област Δ от равнината, които освен стойности на подинтегралната функция в точки използват и няколко интеграла по линии от Δ; Глава 3 е посветена на кубатурни формули от Гаусов тип за пресмятане на интеграл върху единичната сфера в $\mathbb{R}^d$, използващи като информация интеграли върху $(d-2)$-мерни сфери.

Съдържание на дисертацията

Номерацията на всички определения, теореми, твърдения, равенства и т.н. се състои от три компонента, първите два указват раздела, в който се намира съответният елемент, а третия - поредният му номер.

Глава 2 е посветена на получаването на редици от кубатурни формули с различни свойства за приближаване на двойния интеграл върху правоъгълна област Δ в $\mathbb{R}^2$, т.е.

$$I[f] := \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dxdy,$$

където

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Стандартен начин за приближаване на $I[f]$ е с помощта на кубатурна формула $C[f]$,

$$I[f] \approx C[f] = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} a_{ij} f(t_i,\tau_j),$$

където за точките $\{(t_i,\tau_j)\}$ обикновено се предполага, че лежат в областта на интегриране.

В случая на правоъгълна област е възможна употребата на *кубатурни формули от тип произведение*, които се получават след последователното прилагане на две квадратурни формули по всяко от направленията (вж. напр. [22], [5])

$$C[f] = C(Q_1,Q_2)[f] := \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} c_i d_j f(t_i,\tau_j), \tag{2.2.1}$$

където $Q_1[g] = \sum\limits_{i=1}^{n_1} c_i g(t_i)$ и $Q_2[g] = \sum\limits_{j=1}^{n_2} d_j g(\tau_j)$ са квадратурни формули за приближаване съответно на $\ell_1[g] := \int\limits_a^b g(x)\,dx$ и $\ell_2[g] := \int\limits_c^d g(x)\,dx$.

При прилагането на кубатурни формули възникват някои естествени въпроси, свързани с големината на грешката

$$E[C;f] := I[f] - C[f]:$$

Колко малка е величината $|E[C;f]|$?

Възможно ли е както в едномерния случай да бъде намерена оценка за $|E[C;f]|$, в която участва дадена норма на една единствена фиксирана частна производна на подинтегралната функция, например $D^{r,s}f$?

Можем ли да построим дефинитни кубатурни формули от ред (r,s)? и т.н.

Отговорът на втория въпрос е отрицателен. Наистина, ако допуснем, че съществува оценка за грешката от вида $|E[C;f]| \le c_{r,s}(C)\|D^{r,s}f\|$, тогава кубатурната формула C ще е точна за всички функции от $B^{r,s}(\Delta)$.

С $B^{m,n}(\Delta)$ означаваме класа от *блендинг функциите* на две променливи, които представляват естествено обобщение на алгебричните полиноми на една променлива,

$$B^{m,n}(\Delta) := \{f \in C^{m,n}(\Delta) : \ D^{m,n} f = 0\}.$$

Тук, $D^{m,n} f := \dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$, а

$$C^{m,n}(\Delta) := \{f : \Delta \to \mathbb{R} : D^{i,j} f \text{ е непрекъсната }, \ 0 \le i \le m, \ 0 \le j \le n\}.$$

Аналогично на едномерното понятие *алгебрична степен на точност*, в двумерния случай бихме могли да разглеждаме понятието *блендинг-степен на точност*.

Обаче за разлика от едномерния случай, линейното пространство от блендинг функциите $B^{r,s}(\Delta)$ е безкрайномерно, и не съществува кубатурна формула, използваща само стойности на функцията в краен брой точки, която да е точна за всяка функция $f \in B^{r,s}(\Delta)$.

За да получим кубатурни формули, чиято грешка да се оценява с нормата на една единствена производна на подинтегралната функция, ние ще използваме интерполация с блендинг функции. Този подход води до кубатурни формули, които наред с обичайната точкова информация използват и *интеграли от функцията по линии*(вж. [9], [10]).

Всеки две множества

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \text{ и } \mathbf{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\},$$

където $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_m \le b$ и $c \le y_1 < y_2 < \cdots < y_n \le d$, пораждат *блендинг мрежа* $G = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, където

$$G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \{(x, y) \in \Delta : \ \prod_{\mu=1}^{m} (x - x_\mu) \prod_{\nu=1}^{n} (y - y_\nu) = 0\}.$$

С $\mathcal{L}_x$ и $\mathcal{L}_y$ означаваме съответно *интерполационните оператори на Лагранж* на променливите x и y, дефинирани с интерполационните възли $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Тогава имаме следната теорема за интерполацията с блендинг функции (вж. напр. Хаусман и Целер [2])

Теорема 2.1.4 *За всяка функция на две променливи f дефинирана върху Δ съществува единствена* интерполираща блендинг функция на Лагранж $Bf = B_G f \in B^{m,n}(\Delta)$, *която удовлетворява условието $Bf_{|G(X,Y)} = f_{|G(X,Y)}$. Тя се представя във вида*

$$Bf = \mathcal{L}_x f + \mathcal{L}_y f - \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y f. \tag{2.1.10}$$

Ако числата $r, s \in \mathbb{N}$ са такива, че $r \leq m$ и $s \leq n$ и функцията f принадлежи на класа $C^{r,s}(\Delta)$, тогава за разликата $f - Bf$ е валидно представянето

$$f - Bf = (Id - \mathcal{L}_x)(Id - \mathcal{L}_y)f, \tag{2.1.11}$$

където с Id е означен идентитетът.

Интерполационните оператори на Лагранж $\mathcal{L}_x$ и $\mathcal{L}_y$ запазват полиномите от класовете π_{r-1} и π_{s-1}. Ако означим с $\mathcal{K}_r(x,t)$ и $\overline{\mathcal{K}}_s(y,\tau)$ ядрата на Пеано съответно на операторите $Id - \mathcal{L}_x$ и $Id - \mathcal{L}_y$ и приложим в равенство (2.1.11) теоремата на Пеано към функционалите $Id - \mathcal{L}_x$ и $Id - \mathcal{L}_y$, за всяка точка $(x,y) \in \Delta$ получаваме

$$f(x,y) - Bf(x,y) = \iint\limits_{\Delta} \mathcal{K}_r(x,t)\overline{\mathcal{K}}_s(y,\tau) D^{r,s} f(t,\tau)\, dt d\tau. \tag{2.1.12}$$

Вместо да търсим приближение на $I[f]$ с кубатурната формула $C[f]$ ще използваме приближението

$$I[f - Bf] \approx C[f - Bf],$$

където C е кубатурна формула от обичайния вид, т.е. съдържа само стойности на подинтегралната функция в краен брой точки.

По този начин получаваме една нова кубатурна формула $S[f]$ за приближено пресмятане на $I[f]$,

$$I[f] \approx S[f], \quad S[f] := C[f] + I[Bf] - C[Bf]. \tag{2.2.2}$$

Като съставна част в S участва изразът $I[Bf]$, който изглежда по различен начин от обичайните кубатурни формули.

Така *блендинг кубатурна формула* $C_B[f] := I[Bf]$ се получава ако вместо функцията интегрираме нейната интерполираща блендинг функция Bf, използва $m+n$ едномерни интеграла от функцията по линии от блендинг мрежата G и е свързана с интерполационните квадратурни формули Q' и Q'', съответстващи на $\mathcal{L}_x$ и $\mathcal{L}_y$.

За приближено пресмятане на $I[f]$ може да се използва и само блендинг кубатурната формула $C_B[f]$ вместо кубатурната формула $S[f]$.

Използвайки (2.1.12) получаваме

$$E[C_B; f] = I[f] - C_B[f] = \iint\limits_{\Delta} K_r(Q'; t) K_s(Q''; \tau) D^{r,s} f(t,\tau)\, dt d\tau,$$

където $K_r(Q';t)$ и $K_s(Q'';\tau)$ са съответно r-тото ядро на Пеано за Q' и s-тото ядро на Пеано за Q''. Неравенството на Хьолдер и последното равенство ни водят до следната точна оценка за грешката

$$|E[C_B;f]| \leq c_{(r,s),p}(C_B)\|D^{r,s}f\|_{L_p(\Delta)}.$$

Понеже променливите са разделени, то за константата на грешката на блендинг кубатурната формула C_B имаме

$$c_{(r,s),p}(C_B) = c_{r,p}(Q')c_{s,p}(Q'').$$

Следователно за блендинг кубатурната формула C_B имаме точна теоретична оценка на грешката, в която участва нормата на само една производна на подинтегралната функция.

От друга страна, за практически цели е удобно да разполагаме с редица от кубатурни формули, за която абсолютната стойност на грешката намалява с нарастването на поредния номер на съответната формула. Така ще можем да изчисляваме стойността на $I[f]$ с произволна отнапред зададена точност.

Намирането на подобна редица от кубатурни формули може да стане или чрез увеличаване на броя на линиите от блендинг мрежата, или чрез използването на съставни блендинг кубатурни формули. Двата подхода, обаче водят до нарастване на броя на използваните едномерни интеграли. Това е един нежелан ефект, тъй като точното пресмятане на тези интеграли не е винаги възможно.

Поради тази причина ние ще предпочетем схемата за приближаване (2.2.2) в следния вариант: блендинг мрежата G остава постоянна, като числата m и n са сравнително малки. По този начин участващите $m+n$ интеграла по линиите от блендинг мрежата остават непроменени по време на пресмятанията. За подобряване на приближенията за $I[f]$ ще променяме само кубатурната формула C, като използваме съставни кубатурни формули от тип произведение с нарастващ брой възли.

Всяка кубатурна формула S, получена от кубатурната формула от тип произведение C чрез (2.2.2), ще наричаме *модифицирана кубатурна формула от тип произведение (МКФТП)*. Тя се определя еднозначно от две двойки квадратурни формули. Първата двойка (Q', Q'') дефинира интерполиращия блендинг оператор B, а другата двойка (Q_1, Q_2) поражда кубатурната формула от тип произведение $C(Q_1, Q_2)$.

Като използваме (2.1.12), за грешката $E[S;f]$ на МКФТП S получаваме следното интегрално представяне

$$E[S;f] = \iint\limits_{\Delta} K_{r,s}(S;t,\tau)D^{r,s}f(t,\tau)\,dtd\tau, \tag{2.2.4}$$

където $K_{r,s}(S;t,\tau)$ е ядрото на Пеано от ред (r,s) за S

$$K_{r,s}(S;t,\tau) = K_r(Q',t)K_s(Q'',\tau) - Q_1[\mathcal{K}_r(\cdot,t)]Q_2[\overline{\mathcal{K}}_s(\cdot,\tau)]. \tag{2.2.5}$$

Следващата теорема ни дава други полезни представяния за $K_{r,s}(S;t,\tau)$.

Теорема 2.2.1 *Нека освен общите предположения от началото на раздел 2.2.2 имаме още $ACT\,(Q_1) \geq m-1$ и $ACT\,(Q_2) \geq n-1$. Тогава за $(t,\tau) \in \Delta$ ядрото на Пеано $K_{r,s}(S;t,\tau)$ притежава следните представяния:*

$$K_{r,s}(S;t,\tau) = K_r(Q',t)K_s(Q_2;\tau) + K_r(Q_1;t)Q_2[\overline{\mathcal{K}}_s(\cdot,\tau)], \tag{2.2.6}$$

$$K_{r,s}(S;t,\tau) = K_s(Q'',\tau)K_r(Q_1;t) + K_s(Q_2;\tau)Q_1[\mathcal{K}_r(\cdot,t)], \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned} K_{r,s}(S;t,\tau) =& K_r(Q',t)K_s(Q_2;\tau) + K_r(Q_1;t)K_s(Q'';\tau) \\ &- K_r(Q_1;t)K_s(Q_2;\tau). \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Подобно на едномерния случай за $r,s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$ можем да разглеждаме *класовете на Соболев*

$$W_p^{r,s}(\Delta) := \{f : \Delta \to \mathbb{R} : \|D^{r,s}f\|_{L_p(\Delta)} < \infty\}.$$

Ако функцията f е от класа $W_p^{r,s}(\Delta)$, то тогава от равенство (2.2.4) и неравенството на Хьолдер получаваме следната точна оценка за грешката на S

$$|E[S;f]| \leq c_{(r,s),p}(S)\|D^{r,s}f\|_{L_p(\Delta)}, \tag{2.2.9}$$

където

$$c_{(r,s),p}(S) = \|K_{r,s}(S;\cdot,\cdot)\|_{L_q(\Delta)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ако пресмятането на константата на грешката $c_{(r,s),p}(S)$ не е лесно, то може да се пристъпи към по-нататъшно оценяване.

Използвайки равенство (2.2.8), което ни дава връзка между ядрата на Пеано за МКФТП S и свързаните с нея квадратурни формули Q', Q'', Q_1 и Q_2, получаваме оценка отгоре за $c_{(r,s),p}(S)$ с помощта на константите на грешката за тези квадратурни формули.

Следствие 2.2.1 *При предположенията от* **Теорема 2.2.1**, *за $1 \leq p \leq \infty$ имаме*

$$c_{(r,s),p}(S) \leq c_{r,p}(Q')c_{s,p}(Q_2) + c_{r,p}(Q_1)c_{s,p}(Q'') + c_{r,p}(Q_1)c_{s,p}(Q_2). \tag{2.2.10}$$

Както вече споменахме, не е възможно да бъде получена оценка за грешката на обикновената кубатурна формула C, в която участва само една фиксирана частна производна на подинтегралната функция. Сега ще покажем, че съществува оценка за грешката, но с участието на норми на три конкретни частни производни. За целта ще изведем едно друго представяне на модифицираната кубатурна формула от тип произведение S.

Теорема 2.2.2 *При предположенията от* **Теорема 2.2.1** *модифицираната кубатурна формула от тип произведение S притежава следното представяне:*

$$S[f] = C[f] + Q'\big[R[Q_2; f((\cdot)_{Q'}, (\cdot)_R)]\big] + Q''\big[R[Q_1; f((\cdot)_R, (\cdot)_{Q''})]\big]. \quad (2.2.11)$$

Ако подинтегралната функция f е от класа $W_p^{r,s}(\Delta)$, то за грешката на кубатурната формула от тип произведение C е изпълнено

$$\begin{aligned} |E[C; f]| \leq & c_{(r,s),p}(S) \cdot \|D^{r,s} f\|_{L_p(\Delta)} + c_{s,p}(Q_2) \cdot \|Q'\| \cdot \|D^{0,s} f\|_{L_p(\Delta)} \\ & + c_{r,p}(Q_1) \cdot \|Q''\| \cdot \|D^{r,0} f\|_{L_p(\Delta)}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Тук с $||Q'||$ и $||Q''||$ сме означили съответно сумата от абсолютните стойности на коефициентите на Q' и Q'', т.е. $\|Q'\| = \sum_{i=1}^{n_1} |c_i|$ и $\|Q''\| = \sum_{i=1}^{n_2} |d_i|$.

Забележка 2.2.2 *Всъщност по същия начин може да се изведе и следната по-обща оценка за грешката на $|E[C; f]|$*

$$\begin{aligned} |E[C; f]| \leq & c_{(r,s),p_1}(S) \cdot \|D^{r,s} f\|_{L_{p_1}(\Delta)} + c_{\mu,p_2}(Q_2) \|Q'\| \cdot \|D^{0,\mu} f\|_{L_{p_2}(\Delta)} \\ & + c_{\nu,p_3}(Q_1) \cdot \|Q''\| \cdot \|D^{\nu,0} f\|_{L_{p_3}(\Delta)}, \end{aligned}$$

при условие, че $1 \leq p_i \leq \infty$ $(i = 1, 2, 3)$, $\mu \leq ACT\,(Q_2) - 1$, $\nu \leq ACT\,(Q_1) - 1$ и производните на подинтегралната функция, намиращи се в дясната страна на неравенството, съществуват заедно със съответните си норми.

Струва си да отбележим, че извеждането на оценки за грешката на кубатурни формули е нетривиален процес.

В литературата няма много други оценки за грешката на обикновената кубатурна формула C с помощта на производни на подинтегралната функция. Можем да посочим оценките в [22, Глава 5], които обаче използват всички частни производни на подинтегралната функция до даден ред включително.

По аналогия с квадратурните формули МКФТП S ще наричаме *положително (отрицателно) дефинитна от ред* (r, s), ако ядрото ѝ на Пеано $K_{r,s}(S; t, \tau)$ е съответно неотрицателно (неположително) в Δ.

Възползвайки се от резултатата на **Теорема 2.2.1**, получаваме някои достатъчни условия за дефинитност на модифицираните кубатурни формули от тип произведение.

Теорема 2.2.3 *Следните условия са достатъчни за това модифицираната кубатурна формула от тип произведение S да бъде положително дефинитна от ред (r, s):*

(i) Q_1 *и* Q' *са положително дефинитни от ред* r, Q_2 *е положителна и положително дефинитна от ред* s, *и* $\overline{\mathcal{K}}_s \geq 0$ *в* Δ;

(ii) Q_1 *и* Q' *са отрицателно дефинитни от ред* r, Q_2 *е положителна и отрицателно дефинитна от ред* s, *и* $\overline{\mathcal{K}}_s \leq 0$ *в* Δ;

(iii) Q_2 *и* Q'' *са положително дефинитни от ред* s, Q_1 *е положителна и положително дефинитна от ред* r, *и* $\mathcal{K}_r \geq 0$ *в* Δ;

(iv) Q_2 *и* Q'' *са отрицателно дефинитни от ред* s, Q_1 *е положителна и отрицателно дефинитна от ред* r, *и* $\mathcal{K}_r \leq 0$ *в* Δ;

(v) Q_1 *и* Q' *са дефинитни от противоположен тип от ред* r, Q_2 *и* Q'' *са дефинитни от противоположен тип от ред* s, Q_1 *и* Q_2 *са дефинитни от противоположен тип.*

Следните условия са достатъчни за това модифицираната кубатурна формула от тип произведение S да бъде отрицателно дефинитна от ред (r, s):

(i′) Q_1 *и* Q' *са положително дефинитни* r, Q_2 *е положителна и отрицателно дефинитна от ред* s, *и* $\overline{\mathcal{K}}_s \leq 0$ *в* Δ;

(ii′) Q_1 *и* Q' *са отрицателно дефинитни от ред* r, Q_2 *е положителна и положително дефинитна от ред* s, *и* $\overline{\mathcal{K}}_s \geq 0$ *в* Δ;

(iii′) Q_2 *и* Q'' *са положително дефинитни от ред* s, Q_1 *е положителна и отрицателно дефинитна от ред* r, *и* $\mathcal{K}_r \leq 0$ *в* Δ;

(iv′) Q_2 *и* Q'' *са отрицателно дефинитни от ред* s, Q_1 *е положителна и положително дефинтна от ред* r, *и* $\mathcal{K}_r \geq 0$ *в* Δ;

(v′) Q_1 *и* Q' *са дефинитни от противоположен тип от ред* r, Q_2 *и* Q'' *са дефинитни от противоположен тип от ред* s, Q_1 *и* Q_2 *са дефинитни от един и същи тип.*

По принцип влиянието на „коригиращия член“ $I[Bf] - C[Bf]$, който се прибавя към кубатурната формула от тип произведение $C[f]$ за да се получи нейната блендинг модификация $S[f]$, е неопределено. В зависимост от B, C и f той може да намалява или увеличава големината на грешката.

В някои случаи равенството (2.2.11) може да се използва за сравняване на грешките на кубатурните формули S и C.

За да опишем тези случаи, да разгледаме равенство (2.2.11) и да забележим, че

$$E[S;f] = E[C;f] - Q'\big[R[Q_2; f((\cdot)_{Q'}, (\cdot)_R)]\big] - Q''\big[R[Q_1; f((\cdot)_R, (\cdot)_{Q''})]\big],$$

Нека сега предположим, че знакът на $E[S;f]$ е известен, т.е., можем да мислим, че $E[S;f] \geq 0$. Такъв например е случаят когато S е положително дефинитна от ред (r,s) и $D^{r,s}f \geq 0$ в Δ или когато S е отрицателно дефинитна от ред (r,s) и $D^{r,s}f \leq 0$ в Δ.

Сега ако знаем, че

$$Q'\big[R[Q_2; f((\cdot)_{Q'}, (\cdot)_R)]\big] \geq 0 \quad \text{и} \quad Q''\big[R[Q_1; f((\cdot)_R, (\cdot)_{Q''})]\big] \geq 0, \qquad (2.2.13)$$

то тогава

$$0 \leq E[S;f] \leq E[C;f],$$

т.е. грешката на S е по-малка от грешката на C.

Неравенства (2.2.13) са изпълнени например когато Q' и Q'' са положителни квадратурни формули, Q_1 и Q_2 са дефинитни квадратурни формули съответно от ред r и s и $D^{r,0}f$ и $D^{0,s}f$ имат подходящи постоянни знаци в Δ (или поне върху линиите от блендинг мрежата G).

Останалите изисквания към Q', Q'', Q_1 и Q_2 са свързани с предположенията на **Теорема 2.2.3**, които гарантират дефинитност на МКФТП S.

Следващото твърдение обединява множеството условия, от които следва, че дефинитната модифицирана кубатурна формула от тип произведение S е по-добра (има по-малка големина на грешката) от съответната на нея кубатурна формула от тип произведение C. За краткост ще въведем следните означения. Ако квадратурната формула Q е положително (отрицателно) дефинитна от ред m, ще пишем Q е ***ПД*** (m) (***ОД*** (m)). Ако освен това Q е и положителна, ще пишем Q е ***ППД*** (m) (съответно ***ПОД*** (m)).

Твърдение 2.2.1 *Нека $C = C(Q_1, Q_2)$ е кубатурна формула от тип произведение, определена от Q_1 и Q_2, и нека МКФТП S е породена от квадратурните формули Q', Q'', Q_1 и Q_2.*

Нека предположим, че подинтегралната функция f принадлежи на класа $C^{r,s}(\Delta)$ и нейните производни $D^{r,s}f$, $D^{r,0}f$ и $D^{0,s}f$ не си менят знака в Δ.

Тогава изискванията, зададени с всеки от редовете на Таблица 2.1 гарантират верността на неравенствата $0 \leq E[S;f] \leq E[C;f]$.

Таблица 2.1: Достатъчни условия за $0 \leq E[S;f] \leq E[C;f]$

Q'	Q''	Q_1	Q_2	$D^{r,s}f$	$D^{r,0}f$	$D^{0,s}f$
ППД (r)	***ППД*** (s) $\overline{\mathcal{K}}_s \geq 0$	***ПД*** (r)	***ППД*** (s)	≥ 0	≥ 0	≥ 0
ПОД (r)	***ПОД*** (s) $\overline{\mathcal{K}}_s \leq 0$	***ОД*** (r)	***ПОД*** (s)	≥ 0	≤ 0	≤ 0
ППД (r) $\mathcal{K}_r \geq 0$	***ППД*** (s)	***ППД*** (r)	***ПД*** (s)	≥ 0	≥ 0	≥ 0
ПОД (r) $\mathcal{K}_r \leq 0$	***ПОД*** (s)	***ПОД*** (r)	***ОД*** (s)	≥ 0	≤ 0	≤ 0
ППД (r)	***ПОД*** (s)	***ОД*** (r)	***ПД*** (s)	≥ 0	≤ 0	≥ 0
ПОД (r)	***ППД*** (s)	***ПД*** (r)	***ОД*** (s)	≥ 0	≥ 0	≤ 0
ППД (r)	***ПОД*** (s) $\overline{\mathcal{K}}_s \leq 0$	***ПД*** (r)	***ПОД*** (s)	≤ 0	≥ 0	≤ 0
ПОД (r)	***ППД*** (s) $\overline{\mathcal{K}}_s \geq 0$	***ОД*** (r)	***ППД*** (s)	≤ 0	≤ 0	≥ 0
ПОД (r) $\mathcal{K}_r \leq 0$	***ППД*** (s)	***ПОД*** (r)	***ПД*** (s)	≤ 0	≤ 0	≥ 0
ППД (r) $\mathcal{K}_r \geq 0$	***ПОД*** (s)	***ППД*** (r)	***ОД*** (s)	≤ 0	≥ 0	≤ 0
ППД (r)	***ППД*** (s)	***ОД*** (r)	***ОД*** (s)	≤ 0	≤ 0	≤ 0
ПОД (r)	***ПОД*** (s)	***ПД*** (r)	***ПД*** (s)	≤ 0	≥ 0	≥ 0

Ако обърнем посоката на неравенствата в последните три стълба на Таблица 2.1*, то изискванията на всеки ред ще гарантират верността на обратните неравенства* $0 \geq E[S;f] \geq E[C;f]$.

Последният раздел на глава 2 е посветен на приложението на МКФТП.

В него са разгледани някои приложения на изложената теория при намиране на редици от кубатурни формули за приближеното пресмятане на двоен интеграл от функция на две променливи върху правоъгълна област $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ с произволна точност.

Получени са редици от кубатурни формули $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ със следните свойства:

1. Кубатурните формули $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ притежават интегрално представяне на грешката.

2. Кубатурните формули $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ използват като информация малък брой интеграли по линии.

3. Редицата от стойностите на съответните кубатурни формули $\{S_n[f]\}_{n=1}^{\infty}$ клони към точната стойност на интеграла $I[f]$, когато n расте неограничено.

За целта са използвани модифицирани кубатурни формули от тип произведение от вида (2.2.2), където броят на интегралите по линии от блендинг мрежата G е сравнително малък, а квадратурните формули Q', Q'', Q_1 и Q_2 са подбрани подходящо за да имат някои от кубатурните формули и други специални свойства като дефинитност или квазичебишовост.

В подраздели 2.3.1 и 2.3.2 са построени редици от кубатурни формули за приближено пресмятане на интеграла

$$I[f] := \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dxdy,$$

където за област на интегриране е избран за удобство и поради симетрията квадрата $\Delta = [-1,1]\times[-1,1]$, в които участват съответно интеграли по линиите от границата $\partial\Delta$ на областта на интегриране Δ и по координатните оси.

Тук $I[f]$ се приближава с редици от модифицирани кубатурни формули от тип произведение от вида

$$S_n[f] = I[Bf] + C_n[f] - C_n[Bf], \tag{2.3.1}$$

където S_n е породена от четирите квадратурни формули Q', Q'', Q_1 и Q_2, всички приближаващи определени интеграли върху интервала $[-1,1]$.

За квадратурните формули Q_1 и Q_2, които пораждат кубатурната формула от тип произведение C_n имаме, че $Q_1 \equiv Q_2 \equiv Q_n$, където квадратурната формула $Q_n[g] = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i g(x_i)$ е с равноотдалечени възли в интервала $[-1,1]$, т.е.

$$C_n[f] := C(Q_n, Q_n)[f] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j f(t_i,\tau_j), \tag{2.3.2}$$

където възлите $t_i = \tau_i = -1 + \dfrac{2i}{n}$ за $i = 0,\ldots,n$.

По аналогия с едномерния случай ще казваме, че МКФТП $S_n^{C,\beta}$ (2.3.1) е от *квазичебишов тип* ако $C_n[f] = \beta^2 \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(t_i,\tau_j)$ или ако квадратурната формула Q_n е от Чебишов тип, т.е. $Q_n[g] = \beta \sum\limits_{i=0}^{n} g(x_i)$.

Ако блендинг функцията Bf интерполира f по границата $\partial\Delta$ на областта на интегриране Δ, т.е. имаме $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \{-1,1\}$ и $Q'[g] \equiv Q''[g] = g(-1) + g(1)$ са получени някои резултати, отнасящи се за МКФТП от квазичебишов тип.

Теорема 2.3.1 *Измежду всички кубатурни формули $S_n^{C,\beta}$ от квазичебишов тип най-добрата в класа $W_1^{1,1}(\Delta)$ се достига при $\beta_*^2 = \dfrac{4}{n^2} + \dfrac{4}{n^2(n-1)^2}$. При това,*

$$|E[S_n^{B,\beta_*}]| \leq \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f^{(1,1)}\|_1, \tag{2.3.3}$$

Забележка 2.3.1 *Тук под „най-добра“ се разбира следното: Не съществува кубатурна формула от квазичебишов тип $S_n^{C,\beta}$, която да има константа на Пеано $c_{(1,1),1}(S_n^{C,\beta})$ по-малка от тази в дясната страна на оценката* (2.3.3).

Теорема 2.3.2 *Измежду всички кубатурни формули $S_n^{C,\beta}$ от квазичебишов тип най-добрата в класа $W_2^{1,1}(\Delta)$ се достига при $\beta_* = \dfrac{2}{n}$. При това,*

$$|E[S_n^{B,\beta_*}]| \leq \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\|f^{(1,1)}\|_1, \tag{2.3.8}$$

$$|E[S_n^{B,\beta_*}]| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3n}\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{1/2}\|f^{(1,1)}\|_2, \tag{2.3.9}$$

$$|E[S_n^{B,\beta_*}]| < \frac{40}{27n}\left(1 + \frac{27}{40n} - \frac{2}{5n^2}\right)\|f^{(1,1)}\|_\infty. \tag{2.3.10}$$

Забележка 2.3.2 *Тук под „най-добра“ се разбира следното: Не съществува кубатурна формула от квазичебишов тип $S_n^{C,\beta}$, която да има константа на Пеано $c_{(1,1),2}(S_n^{C,\beta})$ по-малка от тази в дясната страна на оценката* (2.3.9).

Константата от неравенство (2.3.8) *е точна. Въпреки, че константата в оценката* (2.3.10) *не е точна, нейният главен член $\dfrac{40}{27n}$ е точен.*

Сега разглеждаме кубатурната формула от общия вид (2.3.1), където C_n е кубатурна формула от тип произведение от вида (2.3.2), породена от кваратурна формула Q_n с $ACT\,(Q_n) \geq 1$.

Като следствие от **Теорема 2.2.1** и **Теорема 2.2.3** получаваме следната

Теорема 2.3.3 *(i) Ако Q_n е положителна и отрицателно дефинитна квадратурна формула от ред 2, то S_n е положително дефинитна модифицирана кубатурна формула от тип произведение от ред $(2,2)$.*

(ii) Ако Q_n е положително дефинитна от ред 2, то S_n е отрицателно дефинитна модифицирана кубатурна формула от тип произведение от ред $(2,2)$.

Ако изберем Q_n да бъде съставната квадратурна формула на трапеците, то получаваме следната кубатурна формула

$$\begin{aligned} S_n[f] \quad &= \ell[f(t_0,\cdot)] + \ell[f(t_n,\cdot)] + \ell[f(\cdot,\tau_0)] + \ell[f(\cdot,\tau_n)] + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f_{ij} \\ &-\frac{2n-1}{n^2}[f_{00}+f_{0n}+f_{n0}+f_{nn}] - \frac{2n-2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}[f_{0k}+f_{nk}+f_{k0}+f_{kn}], \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

където $\ell[g] = \int\limits_{-1}^{1} g(x)\,dx$, а $f_{ij} := f(t_i,\tau_j)$.

Всъщност поради факта, че $(f - Bf)_{|\partial I^2} \equiv 0$, кубатурната формула (2.3.13) съвпада с формулата S_n^{C,β_*} от **Теорема 2.3.2**, т.е. за нея имаме допълнително и някои екстремални свойства.

Следващата теорема ни дава още свойства на кубатурната формула (2.3.13).

Теорема 2.3.4 *Кубатурната формула* (2.3.13) *е положително дефинитна от ред* $(2,2)$. *При това ако* $f^{(2,2)} \geq 0$ *в* Δ, *то имаме*

$$I[f] \geq S_{2n}[f] \geq S_n[f]. \tag{2.3.14}$$

Валидни са следните оценки за грешката на МКФТП S_n:

$$|E[S_n;f]| < \frac{1}{2n^2}\|f^{(2,2)}\|_1, \tag{2.3.15}$$

$$|E[S_n;f]| \leq \frac{2}{45n^2}\left(122 - \frac{100}{n^2} + \frac{14}{n^4}\right)^{1/2}\|f^{(2,2)}\|_2, \tag{2.3.16}$$

$$|E[S_n;f]| \leq \frac{8}{9n^2}\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)\|f^{(2,2)}\|_\infty. \tag{2.3.17}$$

В раздел 2.1 на Глава 2 (**Теорема 2.1.3**) е указан метод за построяване на асимптотично оптимални квадратурни формули в пространствата на Соболев $W_2^2[-1,1]$ (формула (2.1.6)), $W_2^\infty[-1,1]$ (формула (2.1.7)), и на асимптотично оптимални положително дефинитни квадратурни формули от ред 2 (формула (2.1.8)). Смисълът на асимптотичната оптималност

е, че при нарастване на броя на възлите на тези квадратурни формули, константите на грешките им клонят към възможно най-добрите константи за съответните класове на Соболев. Допълнително предимство на тези квадратурни формули е фактът, че те използват възли върху равномерна мрежа.

Ако формулата S_n от (2.3.1) е зададена чрез кубатурна формула от тип произведение от вида C_n (2.3.2), където C_n е определена от квадратурната формула Q_n^+ от равенство (2.1.8), то S_n се представя по следния начин:

$$\begin{aligned}
S_n[f] = {} & \ell[f(t_0,\cdot)] + \ell[f(t_n,\cdot)] + \ell[f(\cdot,\tau_0)] + \ell[f(\cdot,\tau_n)] + \frac{4}{n^2}\sum_{i=3}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-3} f_{ij} \\
& -\frac{15}{4n}[f_{01}+f_{10}+f_{0,n-1}+f_{n-1,0}+f_{1n}+f_{n1}+f_{n-1,n}+f_{n,n-1}] \\
& -\frac{5}{4n}[f_{02}+f_{20}+f_{0,n-2}+f_{n-2,0}+f_{2n}+f_{n2}+f_{n-2,n}+f_{n,n-2}] \\
& +\frac{75}{16n^2}[f_{12}+f_{21}+f_{1,n-2}+f_{n-2,1}+f_{2,n-1}+f_{n-1,2}+f_{n-2,n-1}+f_{n-1,n-2}] \\
& +\frac{15}{2n^2}\sum_{k=3}^{n-3}[f_{1k}+f_{k1}+f_{n-1,k}+f_{k,n-1}] + \frac{5}{2n^2}\sum_{k=3}^{n-3}[f_{2k}+f_{k2}+f_{n-2,k}+f_{k,n-2}] \\
& -\frac{2}{n}\sum_{k=3}^{n-3}[f_{0k}+f_{nk}+f_{k0}+f_{kn}] + \frac{25}{16n^2}[f_{22}+f_{2,n-2}+f_{n-2,2}+f_{n-2,n-2}] \\
& +\frac{225}{16n^2}[f_{11}+f_{1,n-1}+f_{n-1,1}+f_{n-1,n-1}].
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Теорема 2.3.5 *Кубатурната формула* (2.3.18) *е отрицателно дефинитна от ред* $(2,2)$*, т.е ако* $f^{(2,2)} \geq 0$ *в* Δ*, то* $I[f] \leq S_n[f]$*.*
При това

$$|E[S_n;f]| \leq \frac{1}{2n^2}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\|f^{(2,2)}\|_1, \tag{2.3.19}$$

$$|E[S_n;f]| < \frac{1}{n^2}\left(\frac{158}{2025}+\frac{56}{15n}+\frac{410}{81n^2}-\frac{80}{27n^3}+\frac{7004}{27n^4}\right)^{1/2}\|f^{(2,2)}\|_2, \tag{2.3.20}$$

$$|E[S_n;f]| \leq \frac{4}{9n^2}\left(1+\frac{15}{n}\right)\left(1+\frac{1}{4n^2}+\frac{15}{4n^3}\right)\|f^{(2,2)}\|_\infty. \tag{2.3.21}$$

Теореми 2.3.6 и 2.3.7 са аналози съответно на **Теореми 2.3.1 и 2.3.3** за случая, когато блендинг мрежата се състои от двете отсечки върху координатните оси, свързващи съответно двойките точки $\{(-1,0),(1,0)\}$ и $\{(0,-1),(0,1)\}$.

При блендинг интерполация върху тази мрежа, ако се избере Q_n да бъде съставната квадратурна формула на трапеците, се получава следната модифицирана кубатурна формула от тип произведение

$$\begin{aligned} S_n[f] = \quad & 2\ell[f(t_{\frac{n}{2}},\cdot)] + 2\ell[f(\cdot,\tau_{\frac{n}{2}})] + \frac{1}{n^2}[f_{00}+f_{0n}+f_{n0}+f_{nn}] \\ & +\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}[f_{0k}+f_{nk}+f_{k0}+f_{kn}] + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f_{ij} \\ & -\frac{2}{n}[f_{\frac{n}{2},0}+f_{\frac{n}{2},n}+f_{0,\frac{n}{2}}+f_{n,\frac{n}{2}}] - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}[f_{\frac{n}{2},k}+f_{k,\frac{n}{2}}]. \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

За тази кубатурна формула е доказана следната

Теорема 2.3.8 *Кубатурната формула* (2.3.31) *е отрицателно дефинитна от ред* $(2,2)$. *Като при това, ако* $f^{(2,2)} \geq 0$ *в* Δ, *то*

$$L[f] \leq S_{2n} \leq S_n[f]. \tag{2.3.32}$$

Валидни са следните оценки за грешката на МКФТП S_n*:*

$$|E[S_n;f]| \leq \frac{1}{2n^2}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\|f^{(2,2)}\|_1, \tag{2.3.33}$$

$$|E[S_n;f]| \leq \frac{1}{45n^2}\left(158+\frac{275}{n^2}+\frac{1873}{8n^4}\right)^{1/2}\|f^{(2,2)}\|_2, \tag{2.3.34}$$

$$|E[S_n;f]| \leq \frac{4}{9n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\|f^{(2,2)}\|_\infty. \tag{2.3.35}$$

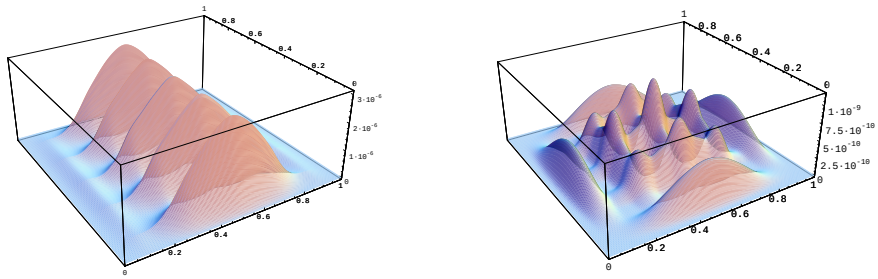
Изведени са оценки за грешките на МКФТП, породени от блендинг интерполационни оператори върху мрежата, състояща се от контура на Δ или от отсечките от координатните оси, намираши се в Δ, в случаите когато Q_n е асимптотично оптималната дефинитна квадратурна формула от ред 2 (**Теорема 2.3.9**). На базата на **Твърдение 2.2.1** е направен анализ за това кога МКФТП от **Теореми 2.3.4, 2.3.5, 2.3.8 и 2.3.9** са с по-малка големина на грешката от тази в съответстващите им стандартни кубатурни формули от тип произведение (**Теорема 2.3.10**).

В подраздел 2.3.3 с помощта на **Теорема 2.2.3** и подходящ избор на квадратурните формули Q', Q'', Q_1 и Q_2 са конструирани редици от дефинитни МКФТП от по-висок ред за пресмятане на интеграла

$$I[f] := \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dxdy,$$

ако за подинтегралната функция имаме представянето $f(x,y) = g(x \cdot y)$, където $g(t)$ е функция на една променлива и за нея може да бъде приложена теоремата на Лайбниц и Нютон.

На фигура 2.1 са изобразени графиките на ядрата на Пеано за положително дефинитните МКФТП съответно от ред $(4,2)$ и $(4,4)$ при $n = 5$. Съответните графики на ядрата на Пеано за отрицателно дефинитните МКФТП имат подобен вид и затова не ги поместваме.



а) Графика на $K_{4,2}(S^{+}_{4,2,5}; t, \tau)$ б) Графика на $K_{4,4}(S^{+}_{4,4,5}; t, \tau)$

Фигура 2.1: Графики на ядрата на Пеано за дефинитни МКФТП.

Тези редици от дефинитни МКФТП и съответните им кубатурни формули от тип произведение са приложени към интеграла от следните две функции

$$f_1(x,y) = e^{xy}, \quad f_2(x,y) = \cos\, xy.$$

Нека отбележим, че $D^{i,j} f_1(x,y) \geq 0$ за всеки i, j и $(x,y) \in \Delta$, докато $D^{4,2} f_2(x,y)$ и $D^{4,4} f_2(x,y)$ си менят знака в $[0,1]^2$.

Чрез подходяща смяна на променливите (напр. $u = xy, v = y$) двойните интеграли от f_1 и f_2 върху $[0,1]^2$ могат да се сведат до едномерни, така имаме

$$I[f_1] = \int\limits_0^1 \frac{e^u - 1}{u}\,du, \quad I[f_2] = \int\limits_0^1 \frac{\sin\, u}{u}\,du.$$

След като развием в ред на Маклорен подинтегралните функции и оценим подходящо остатъчния член можем да получим истинските стойности

на $I[f_1]$ и $I[f_2]$

$$I[f_1] = 1.317902151454403\ldots,\ I[f_2] = 0.946083070367183\ldots.$$

С помощта на продукта *Mathematica 6.0* на *Wolfram Research* са извършени някои числени експерименти с тези дефинитни МКФТП, приложени върху функциите f_1 и f_2. Получените резултати са приложени в съответни таблици.

Изведени са също и теоретични оценки за грешките на съответните редици от дефинитни МКФТП при $p = \infty$.

Въпреки, че теоретичните оценки обикновено дават стойности много по-големи от истинската стойност на грешката, в горния случай се наблюдава забележителна стабилност (по отношение на n) и приемливо малко отношение на преоценяване (отношението между теоретичната оценка и истинската стойност на грешката).

Резултатите показват, че за функциите f_1 и f_2 употребата на МКФТП S_n дава значително по-добри резултати от тези на C_n.

Трябва да отбележим обаче, че за други подинтегрални функции е възможно числените експерименти да покажат, че кубатурната формула от тип произведение C_n е по-добра от нейната съответна МКФТП S_n.

Глава 3 е посветена на намирането на кубатурни формули с максимална алгебрична степен на точност за пресмятане на интеграл от функция на d променливи върху единичната сфера S^{d-1} в $\mathbb{R}^d$.

В едномерния случай квадратурни формули, при които свободните възли са избрани така, че да осигуряват максимална алгебрична степен на точност, се *наричат квадратурни формули от Гаусов тип.* За тези квадратурни формули съществува пълна характеризация: за всяко n съществува единствена квадратурна формула от Гаусов тип, чиито възли са нулите на n-тия ортогонален в интервала $[a, b]$ със съответното тегло полином.

Подобен резултат следва и за интегрирането на тригонометричните полиноми (вж. напр. [18]).

Отчитайки, че проекцията на всеки алгебричен полином на две променливи от тотална степен n върху единичната окръжност е тригонометричен полином от ред n, то можем да формулираме резултата от твърдението за тригонометрични полиноми в следния вид.

Следствие 3.1.1 *Квадратурната формула*

$$\int_0^{2\pi} P(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P(\cos\theta_k, \sin\theta_k), \quad \theta_k := \frac{2k\pi}{n+1},$$

е точна за всеки алгебричен полином на две променливи P от тотална степен n.

За съжаление не съществува директен аналог на последния резултат в тримерния случай. По-точно казано не е известен отговорът на следния въпрос: *За всяко фиксирано $n \in \mathbb{N}$ какво е разположението на точките $X_1, \ldots, X_n$ върху единичната сфера така, че съответната формула за приближаване на повърхнинния интеграл върху сферата, използваща стойностите на подинтегралната функция в $\{X_k\}_{k=1}^n$ да има максималната възможна степен на точност по отношение на пространството от алгебрични полиноми на три променливи?*

Подобни екстремални формули за конкретни малки стойности на n съществуват (вж. напр. [29]), но въпреки просторните изследвания на общия случай през последните сто години, все още не е известна конфигурация от n възела, която за всяко n да поражда оптимална кубатурна формула от Гаусов тип върху сферата в d-мерното пространство $\mathbb{R}^d$. Този въпрос е пряко свързан с теорията на ортогоналните полиноми на повече променливи (вж. [20]).

Като е използвана нестандартна информация за подинтегралната функция, е представено едно естествено обобщение на класическата квадратурна формула на Гаус в многомерния случай (вж. [15]).

Подобно обобщение - Гаусова кубатурна формула чрез използване на неточкова информация (стойностите на n интеграла по сеченията на единичното кълбо с n хиперравнини) за интеграла върху единичното кълбо в $\mathbb{R}^d$ е получено в [16] и [17] от Боянов и Петрова, то се отнася за кубатурни формули, които приближават интеграла върху единичното кълбо от вида

$$\int\limits_B f \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \int\limits_{B_k} f, \tag{3.1.2}$$

където B е единичното кълбо в $\mathbb{R}^d$, а $\{B_k\}_{k=1}^n$ са сеченията на на B с n хиперравнини.

Теорема 3.1.3 (Боянов, Петрова) *За всяко естествено число n и размерност d съществува единствена (с точност до ротация) кубатурна формула от вида* (3.1.2)*, която интегрира точно всички полиноми на d променливи от тотална степен $2n-1$.*

При това всички хиперравнини са перпендикулярни на някоя от координатните оси (т.е. те са успоредни помежду си) и минават съответно през нулите на n-тия полином на Гегенбауер с тегло $(1-t^2)^{\frac{d-1}{2}}$.

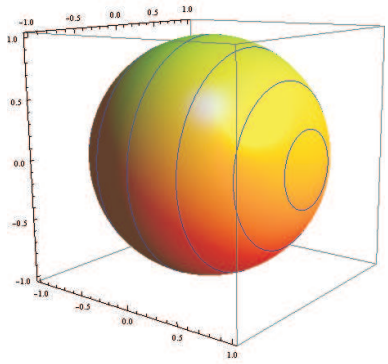
В тази глава са разгледани кубатурни формули за пресмятане на интеграла по единичната сфера, използващи като информация интеграли по сеченията на сферата с n хиперравнини. За да стане по-ясно ще формулираме задачата в най-простия случай при $d = 3$.

Разглеждаме кубатурни формули за приближаване на интеграла върху единичната сфера от вида

$$\int\limits_S f \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \oint\limits_{C_k} f, \tag{3.1.3}$$

където S е единичната сфера в $\mathbb{R}^3$, а $\{C_k\}_{k=1}^n$ са окръжности върху S.

На фигура 3.1 е изобразено разположението на окръжностите $\{C_k\}_{k=1}^n$ на кубатурната формула от Гаусов тип при $d = 3$ и $n = 7$.



Фигура 3.1: Разположение на окръжностите $\{C_k\}_{k=1}^7$ при $d = 3$

Намерени са явни представяния за коефициентите $\{A_k\}_{k=1}^n$ и е описано разположението на окръжностите $\{C_k\}_{k=1}^n$ така, че кубатурната формула (3.1.3) да има максималната възможна алгебрична степен на точност $2n-1$.

На всяка двойка (t, ξ) от число $t \in (-1, 1)$ и вектор $\xi \in S^{d-1}$ съответства хиперравнина $\ell(t, \xi)$, която е перпендикулярна на вектора ξ и минава през точката $t\xi$. Така множествата $C(t, \xi) := S^{d-1} \cap \ell(t, \xi)$, се наричат *сферични ивици.*

Следващата теорема гарантира съществуването на кубатурна формула с максималната възможна ACT, като при това тази формула е от специален вид - сферичните ивици са избрани така, че лежат в успоредни помежду си хиперравнини.

Теорема 3.2.1 *За всяко $\xi \in S^{d-1}$, кубатурната формула*

$$\int\limits_{S^{d-1}} F(\mathbf{x})\, d\sigma(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int\limits_{C(\lambda_k, \xi)} F(\mathbf{x})\, d\sigma_k(\mathbf{x}), \tag{3.2.2}$$

където

$$\alpha_k = \frac{\widetilde{\alpha}_k}{(1-\lambda_k^2)^{\frac{d-2}{2}}}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

интегрира точно всички алгебрични полиноми F на d променливи от тотална степен $2n-1$.

Тук сме означили съответно с $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_n$ коефициентите, а с $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ възлите на едномерната квадратурна формула на Гаус за интервала $[-1, 1]$ с тегло

$$\mu_d(t) := (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}.$$

Дадени са още и някои частични характеризации на гореописаната кубатурна формула от нестандартен тип. Въпросът за единствеността (с точност до ротация) на формула с максимална алгебрична степен на точност в общия случай остава открит.

В **глава 4** са разгледани някои формули за приближаване на нормалната вероятност.

За нормално разпределената случайна величина X вероятността за това X да принадлежи на интервала $(0, x)$ се задава с

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Интегралът в $P(x)$ е може би най-известният пример за интеграл, който не може да се пресметне чрез теоремата на Лайбниц и Нютон.

Сродна на $P(x)$ е функцията на грешката

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt = 2P(\sqrt{2}x). \tag{4.1.1}$$

Като част от стандартните учебници по математическа статистика обикновено се включват четири- или петзначни таблици със изчислени стойности на $P(x)$. Повечето математически справочници (вж., напр. [22, 24, 25]) предоставят подробна информация за $P(x)$ и $\operatorname{erf}(x)$.

Някои редове (напр. формули (7.1.5) и (7.1.6) в [22]) са бързо сходящи и могат да бъдат използвани за ефективно пресмятане на $\operatorname{erf}(x)$.

Ние обаче бихме искали да разполагаме с формула за приближаване на $\operatorname{erf}(x)$ (или на $P(x)$) от затворен тип, която да притежава добра равномерна (т.е. независеща от x) оценка за грешката.

Всяка формула от този тип би могла да се разглежда като кодираща функция за информацията относно $\operatorname{erf}(x)$ (или $P(x)$) и би могла да служи за бързото възстановяване на стойностите на функциите в произволна точка x, $0 < x < \infty$.

В [22] са дадени някои формули за приближение на $\mathrm{erf}(x)$, които имат оценки за грешката между 5×10^{-4} и 1.5×10^{-7}.

В тази глава са представени някои нови формули за приближаване на $P(x)$ (вж. [21]). В основата на тяхното извеждане стои представянето

$$P^2(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^x \int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)} du\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^x \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)} du\, dt.$$

След преминаване към полярни координати получаваме

$$P^2(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{x}{\cos\varphi}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr\, d\varphi = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\cos\varphi})^2} d\varphi\,, \tag{4.1.4}$$

така пресмятането на $P(x)$ се свежда до пресмятането на последния интеграл.

Квадратурни формули за приближено пресмятане на този интеграл заедно с оценки за грешката, получени с помощта на съответните ядра на Пеано, са дадени в раздел 4.3.

В раздел 4.2 са представени нашите формули $\{F_i(x)\}_{i=1}^{13}$ за приближаване на интеграла на нормалната вероятност $P(x)$, които са получени от (4.1.4), чрез заместване на интеграла

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} g(\varphi)\, d\varphi, \quad g(\varphi) = e^{-\frac{x^2}{2\cos^2\varphi}},$$

с някоя от квадратурните формули от раздел 4.3 (при $a = 0$ и $b = \dfrac{\pi}{4}$). Тези формули са:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{2}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} + \Big(1 + \frac{\pi x^2}{12}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{4}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-(2-\sqrt{2})x^2} + \Big(1 + \frac{\pi x^2}{24}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$F_3(x) = \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{6}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-2(2-\sqrt{3})x^2} + 2e^{-\frac{2x^2}{3}} + \Big(1 + \frac{\pi x^2}{36}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$F_4(x) = \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{6}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} + 4e^{-(2-\sqrt{2})x^2} + e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$F_5(x) = \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{30}\Big(7e^{-\frac{x^2}{2}} + 16e^{-(2-\sqrt{2})x^2} + \big(7 + \frac{\pi x^2}{4}\big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$F_6(x) = \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{2}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} + \Big(1 + \frac{\pi x^2}{12} - \frac{\pi^3(x^6 - 6x^4 + 5x^2)}{2880}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} F_7(x) =& \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{4}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-(2-\sqrt{2})x^2} \\ &+ \Big(1 + \frac{\pi x^2}{24} - \frac{\pi^3(x^6 - 6x^4 + 5x^2)}{23040}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_8(x) =& \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{6}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-2(2-\sqrt{3})x^2} + 2e^{-\frac{2x^2}{3}} \\ &+ \Big(1 + \frac{\pi x^2}{36} - \frac{\pi^3(x^6 - 6x^4 + 5x^2)}{77760}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_9(x) =& \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{70}\Big(\Big(19 - \frac{\pi^2 x^2}{192}\Big)e^{-\frac{x^2}{2}} + 32e^{-(2-\sqrt{2})x^2} \\ &+ \Big(19 + \pi x^2 + \frac{\pi^2(x^4 - 2x^2)}{48}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{10}(x) =& \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{630}\Big(\Big(187 - \frac{3\pi^2 x^2}{32}\Big)e^{-\frac{x^2}{2}} + 256e^{-(2-\sqrt{2})x^2} \\ &+ \Big(187 + \frac{47\pi x^2}{4} + \frac{3\pi^2(x^4 - 2x^2)}{8} + \frac{\pi^3(x^6 - 6x^4 + 5x^2)}{192}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$F_{11}(x) = \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{8}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} + 3e^{-2(2-\sqrt{3})x^2} + 3e^{-\frac{2x^2}{3}} + e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} F_{12}(x) =& \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{80}\Big(13e^{-x^2/2} + 27e^{-2(2-\sqrt{3})x^2} + 27e^{-\frac{2x^2}{3}} \\ &+ \Big(13 + \frac{\pi x^2}{12}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{13}(x) =& \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{2240}\Big(\Big(391 - \frac{\pi^2 x^2}{24}\Big)e^{-\frac{x^2}{2}} + 729e^{-2(2-\sqrt{3})x^2} + 729e^{-\frac{2x^2}{3}} \\ &+ \Big(391 + 13\pi x^2 + \frac{\pi^2(x^4 - 2x^2)}{6}\Big)e^{-x^2}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В раздел 4.4 са намерени някои оценки за равномерната норма на g'', $g^{(4)}$ и $g^{(6)}$, като тези оценки са използвани в раздел 4.5 за получаване на теоретични оценки за грешката на нашите формули.

Въпреки, че получените оценки са много по-големи от истинските стойности на грешката, те са ценни сами по себе си защото важат за целия интервал $(0, \infty)$ и не се базират на сравнение с никои от табулираните стойности на $P(x)$.

Авторът благодари на доц. д.м.н. Гено Николов и акад. проф. д.м.н. Борислав Боянов за всестранната помощ при написването на тази дисертация. Също на доц. д-р Милко Такев и на колегите си от катедри „Числени методи и алгоритми“ и „Обучение по математика и информатика“ към ФМИ-СУ за тяхната подкрепа. Накрая, но не на последно място, на цялото си семейството за проявеното търпение и разбиране.

Апробация

Резултатите от глава 2 на дисертацията са публикувани в

[9] V. Gushev, G. Nikolov, Some cubature formulae using mixed type data. В: W. Haussmann, K. Jetter, M. Reimer (Eds.): Recent progress in multivariate approximation, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2001, 163–184.

и

[10] V. Gushev, G. Nikolov, Modified product cubature formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*(2008), doi:10.1016/j.cam.2008.05.031 (Импакт фактор за 2006: 0.759)

Съдържанието на глави 3 и 4 се базира съответно на

[15] B.Bojanov and V. Gushev, A quarature formula of Gaussian type on the sphere, *East J. Approx.* **11**, No 2(2005), 119-130.

и

[21] V. Gushev, G. Nikolov, Formulae for calculation of normal probability. В: T. Boyanov et al. (Eds.): Numerical Methods and Aaplications 2006, LNCS 4310, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, 369–377.

Части от дисертацията са докладвани на:

✓семинара на катедра „Числени методи и алгоритми“ при СУ-ФМИ;

✓международната конференция по Многомерни апроксимации Бюмерхолц 2000;

✓международната конференция по Числени методи Боровец 2006;

✓международния семинар по Теория на апроксимациите и приложения Китен 2006 и Созопол 2007;

✓отчетната сесия на BGSIAM - София 2007.

Библиография

[1] B. D. Bojanov, D. P. Dryanov, W. Haussmann, G. P. Nikolov, Best one-sided L^1-approximation by blending functions. B: W. Haussmann, K. Jetter (Eds.): Advances in multivariate approximation, Wiley–VCH, Berlin–Weinheim–New York–Chichester–Brisbane–Singapore–Toronto 1999.

[2] W.Haussmann, K.Zeller, Blending interpolation and best L_1-approximation, *Archiv der Mathematik*, **40**, 1983.

[3] H. Braß, Quadraturverfahren, Vandenhoech & Ruprecht, Göttingen 1977.

[4] H. Braß, K.-J. Förster, On the application of the Peano representation of linear functionals in numerical analysis. B: G. Milovanovic (Ed.): Recent progress in inequalities, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.

[5] P. J. Davis, P. Rabinovitz, Methods of numerical integration, Academic Press, New York–San Francisco–London 1975.

[6] K.-J. Förster, Exit criteria and monotonicity in compound quadratures, *Numer. Math.* **66** (1993) 321–327.

[7] K.-J. Förster, A survey of stopping rules in quadrature based on Peano kernel methods, *Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo*, Ser. II, **33** (1993), 311–330.

[8] K.-J. Förster, P. Köhler, G. P. Nikolov, Monotonicity and stopping rules for compound Gauss-type quadrature formulae, *East J. Approx.* **4** (1998), 55–74.

[9] V. Gushev, G. Nikolov, Some cubature formulae using mixed type data. B: W. Haussmann, K. Jetter, M. Reimer (Eds.): Recent progress in multivariate approximation, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2001, 163–184.

[10] V. Gushev, G. Nikolov, Modified product cubature formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*(2008), doi:10.1016/j.cam.2008.05.031

[11] V. I. Krylov, Approximate calculation of integrals, Nauka, Moscow 1967 (in Russian). English translation of the first edition: MacMillan, New York–London 1962.

[12] A. Sard, Linear approximation, Math. Surveys and Monographs no. 9, Amer. Math. Soc., Providence 1982 (Second printing).

[13] G. Schmeisser, Optimale Quadraturformeln mit semidefiniten Kernen, *Numer. Math.* **20** (1972), 32–53.

[14] A. H. Stroud, Approximate calculation of multiple integrals, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1971.

[15] B.Bojanov and V. Gushev, A quarature formula of Gaussian type on the sphere, *East J. Approx.* **11**, No 2(2005), 119-130.

[16] B. Bojanov and G. Petrova, Numerical integration over a disk. A new Gaussian quadrature formula, *Numer. Math.* **8**, 1 (1998), 39–59.

[17] B. Bojanov and G. Petrova, Uniqueness of the Gaussian quadrature for a ball, *J. Approx. Theory* **104**, 1 (2000), 21–44.

[18] A. H. Turetzkii, On quadrature formulae that are exact for trigonometric polynomials. *East J. Approx.* **11** , No 3(2005), 337-359.

[19] R. Marr, On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals, *J. Math. Anal. appl.* **45**, (1974), 357–374.

[20] C.F. Dunkl and Y. Xu, Orthogonal Polynomials of Several Variables, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[21] V. Gushev, G. Nikolov, Formulae for calculation of normal probability. B: T. Boyanov et al. (Eds.): Numerical Methods and Aplications 2006, LNCS 4310, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, 369–377

[22] Abramowitz, M., Stegun, I.: Handbook of Mathematical Functions, Dover New York 1972

[23] Bagby, R. J.: Calculating Normal Probability. *Amer. Math. Monthly*, **102**, 1 (1995) 46–49.

[24] Korn, G.A., Korn, T.M.: Mathhematical Handbook for Scientist and Engineers, MGraw–Hill Book Company, New York Toronto London (1961).

[25] Gradsteyn, I.S., Ryznik, I.M.: Tables of Integrals, Sums, Series and Products, 4th edn. Academic Press, New York (1980).

[26] Андреев, А., Боянов, Б. и др., Сборник от задачи по числени методи, Университетско издателство, София 1994.

[27] Боянов, Б., Лекции по Числени методи, Дарба, София 2008.

[28] Сендов, Бл., Попов, В., Числени методи - първа част, Университетско издателство, София 1996.

[29] Мысовских, И., Интерполяционные кубатурные формулы, Наука, Москва 1981.

Авторска справка

По мнение на автора основните резултати и приноси на дисертацията са следните:

1. С помощта на интерполация с блендинг функции е разработена схемата (2.2.2) за приближение на интеграла от функция на две променливи върху правоъгълна област. В получените по тази схема модифицирани кубатурни формули от тип произведение (МКФТП) като информация освен стойности на подинтегралната функция участват и няколко интеграла по линии. За функции от класовете на Соболев са изведени точни оценки за грешката на тези формули с помощта на ядра на Пеано. В тези оценки участва нормата на само една фиксирана производна на подинтегралната функция. Като следствие са получени и оценки за грешката на конвенционалните кубатурни формули от тип произведение с участието на само три производни на подинтегралната функция (**Теорема 2.2.2**). Изведени са достатъчни условия за дефинитност на МКФТП (**Теорема 2.2.3**). Указани са случаи, при които МКФТП е по-добра от съответната ѝ кубатурна формула от тип произведение (**Твърдение 2.2.1**). Построени са редици от дефинитни кубатурни формули, които използват като информация малък брой интеграли по линии. С помощта на продукта *Mathematica 6.0* на *Wolfram Research* са извършени някои числени експерименти, илюстриращи тяхната ефективност.

2. Получена е кубатурна формула от Гаусов тип (точна за всички полиноми на d променливи от тотална степен $2n-1$) за пресмятане на интеграла от функция на d променливи върху единичната сфера S^{d-1} в $\mathbb{R}^d$, използваща като информация n на брой интеграла върху сечения на S^{d-1} с хиперравнини (вж. **Теорема 3.2.1**). Дадени са също и някои характеризации на гореописаната кубатурна формула от нестандартен тип.

3. Изведени са нови приближени формули за пресмятане на интеграла на нормалната вероятност $P(x)$. Намерени са някои теоретични оценки за грешката на тези формули, които не се базират на сравнение с табулирани стойности на $P(x)$, и важат за целия интервал $(0,\infty)$. С продукта *Mathematica 6.0* са изследвани действителните им грешки. Като линейна комбинация на някои от тях емпирично е получена нова формула със значително по-малка грешка.