Диференциална Геометрия

Весела Михова

ЗАДАЧИ от ТЕОРИЯ НА КРИВИТЕ

1 Векторна функция на скаларен аргумент

$$v = v(q): \quad \forall\, q \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \;\Rightarrow\; v(q) = \sum_{i=1}^{3} x_i(q)\, e_i \quad (Oe_1e_2e_3)$$

Задача 1.1. *Нека векторната функция $v(q)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $\mathcal{I}$ и $\forall\, q \in \mathcal{I}$ притежава производна $= \overrightarrow{0}$. Тогава $v(q) = a = \overrightarrow{const} \quad \forall\, q \in \mathcal{I}$.*

Задача 1.2. *Нека векторната функция $v(q)$ е от класа C^{n+1} в интервала $\mathcal{I} : |q - q_0| \leq r$. За всяко q от $\mathcal{I}$ е вярна формулата на Тейлор:*

$$v(q) = v(q_0) + \frac{v'(q_0)}{1\,!}(q - q_0) + \frac{v''(q_0)}{2\,!}(q - q_0)^2 + ... + \frac{v^{(n)}(q_0)}{n\,!}(q - q_0)^n + V(q)(q - q_0)^{n+1},$$

където $V(q)$ е дефинирана за всяко $q \neq q_0, q \in \mathcal{I}$, ограничена е в интервала $\mathcal{I} \setminus \{q_0\}$ и

$$\lim_{q \to q_0,\, q \neq q_0} V(q) = \frac{v^{(n+1)}(q_0)}{(n+1)\,!}.$$

Задача 1.3. *Нека векторната функция $v(q)$ на скаларния аргумент $q \in \mathcal{I}$ е от класа C^1. Да се докаже, че производната ѝ $v'(q)$ е инвариантно свързана с $v(q)$ при произволно движение θ в пространството $\mathbb{E}^3$.*

Задача 1.4. *Нека векторната функция $v(q)$ на скаларния аргумент $q \in \mathcal{I}$ е от класа C^2. Да се докаже, че:*

- *ако векторът $v(q)$ е успореден на постянна равнина β за всяко $q \in \mathcal{I}$, то $v(q)v'(q)v''(q) = 0$, $\forall\, q \in \mathcal{I}$;*
- *ако $v(q) \times v'(q) \neq \overrightarrow{0}$ $\forall\, q \in \mathcal{I}$ и $v(q)v'(q)v''(q) = 0$ $\forall\, q \in \mathcal{I}$, то векторът $v(q)$ е успореден на постоянна равнина за всяко $q \in \mathcal{I}$.*

2 Гладки пространствени линии

$$v = v(q),\ q \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}: \quad v(q) \in \mathcal{C}^r,\ r \in \mathbb{N}_0,\ q \in \mathcal{I}\ \wedge\ v'(q) \neq 0,\ \forall\, q \in \mathcal{I}.$$

Задача 2.1. *Нека* $c : x = x(q),\ q \in \mathcal{I}$ *е гладка линия и* $a, b \in \mathcal{I}$ $(a < b)$. *Нека* $q = \lambda(\overline{q}),\ \overline{q} \in \overline{\mathcal{I}}$ *е гладка смяна на параметъра* q. *Разглеждаме дъга от* c *с начална точка* $x(a)$ *и крайна точка* $x(b)$. *Тази дъга при параметризацията* $c : \overline{x} = x(\lambda(\overline{q})),\ \overline{q} \in \overline{\mathcal{I}}$ *се определя с* $a_1, b_1 \in \overline{\mathcal{I}}$, *за които* $\lambda(a_1) = a,\ \lambda(b_1) = b$. *Да се докаже, че дължината на дъгата от* c *с начална точка* $x(a)$ *и крайна точка* $x(b)$ *при смяната на параметъра е инвариантна с точност до знак, т.е.* $\overline{s} = \varepsilon s,\ \varepsilon = sign\,\dfrac{d\lambda}{dq}$.

Задача 2.2. *Да се докаже, че кривата*

$$c : x_1 = ae^{mq}\cos q,\ x_2 = ae^{mq}\sin q, x_3 = be^{mq},\ q \in \mathbb{R},\ a, b, m = const,$$

е разположена върху кръговия конус

$$S : b^2(y_1^2 + y_2^2) - a^2 y_3^2 = 0$$

и пресича образуващите му под постоянен ъгъл $(Oe_1e_2e_3)$.

Да се намери дължината на дъгата от c *с начало* $x(0)$ *и край* $x(q)$.

Кривата c *се нарича* **конична локсодрома**.

Задача 2.3. *Спрямо* $Oe_1e_2e_3$ *е зададена кривата*

$$c : x_1 = a\cos u,\ x_2 = a\sin u,\ x_3 = av;\ a = const,\ u \in [0, 2\pi],\ v = v(u) \in C^2.$$

- *Да се намери уравнение на допирателната* g *към* c *в произволна нейна точка.*
- *Нека* $A = g \cap Oe_1e_2$. *Да се определи* $v(u)$ *така, че* A *да описва окръжност с център началото на координатната система и радиус* $R = const > a$.
- *Нека кривата*

  $$c_N : x_1 = a\cos u,\ x_2 = a\sin u,\ x_3 = ak\,e^{\frac{-au}{\sqrt{R^2-a^2}}},\ k = const$$

  минава през точката $N(a, 0, a)$. *Да се намери проекцията* $\overline{c}$ *на* c_N *върху равнината* Oe_1e_2.
- *Да се намери дължината на дъгата на кривата* $\overline{c}$.
- *Да се докаже, че за всяко* $v = v(u)$ *кривата* c *лежи върху цилиндрична повърхнина с управителна крива* $\overline{c}$ *и образуващи, успоредни на оста* Oe_3.

3 Правилни линии. Придружаващ триедър

$$v = v(q),\ q \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}:\ v(q) \in \mathcal{C}^2,\ q \in \mathcal{I}\ \wedge\ v'(q)\ \times\ v''(q) \neq \overrightarrow{0},\ \forall\, q \in \mathcal{I}.$$

Скаларни и векторни инварианти на крива:

$$\varkappa = \sqrt{x''^2} = \frac{\sqrt{(\dot{x}\ \times\ \ddot{x})^2}}{(\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau = \frac{x' x'' x'''}{x''^2} = \frac{\dot{x}\,\ddot{x}\,\dddot{x}}{(\dot{x}\ \times\ \ddot{x})^2}$$

$$t = x' = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2}}, \quad b = \frac{x' \times x''}{\sqrt{x''^2}} = \frac{\dot{x}\ \times\ \ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}\ \times\ \ddot{x})^2}}, \quad n = b \times t = \frac{x''}{\sqrt{x''^2}}$$

Оскулачна равнина $\{x\,t\,n\}:\ b(y-x) = 0$

Нормална равнина $\{x\,n\,b\}:\ t(y-x) = 0$

Ректифицираща равнина $\{x\,b\,t\}:\ n(y-x) = 0$

Формули на Френе: $x = x(s),\ c \in \mathcal{C}^3,\ x'^2(s) = 1,\ x' \times x'' \neq \overrightarrow{0},\ s \in \mathcal{I}$

$$x' = t, \quad t' = \varkappa\, n, \quad n' = -\varkappa\, t + \tau\, b, \quad b' = -\tau\, n$$

$$\varkappa = t'\, n = -n'\, t, \quad \tau = n'\, b = -b'\, n$$

Вектор на Дарбу: $\omega = \tau\, t + \varkappa\, b$

Задача 3.1. *Оскулачните равнини на 3-кратно гладка правилна крива са успоредни на дадена права. Да се докаже, че кривата е равнинна.*

Задача 3.2. *Ако всички оскулачни равнини на една крива минават през фиксирана точка, то кривата е равнинна.*

Задача 3.3. *Ако всички допирателни към една крива минават през фиксирана точка, то кривата е права линия.*

Задача 3.4. *Всички ректифициращи равнини на една правилна крива* $c \in \mathcal{C}^5 : x = x(s),\ x'^2 = 1$ *минават през една точка* O. *Да се докаже, че*

$$\frac{\tau}{\varkappa} = as + d,\ a = const,\ d = const.$$

3.1 Витлови линии

3.1.1 Обикновена витлова линия:

Траекторията на (фиксирана) точка, движеща се с равномерна праволинейна скорост d по образуваща на прав кръгов цилиндър с радиус a, който се върти около оста си с постоянна ъглова скорост ω.

$$c : x_1 = a\cos\omega t,\ x_2 = a\sin\omega t,\ x_3 = d\,t;\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Задача 3.5. *Да се намерят скаларните и векторните инварианти на кривите*

- $c : x_1 = a\cos q,\ x_2 = a\sin q,\ x_3 = d\,q;\ q \in \mathbb{R},\ a = const,\ d = const.$

  Да се докаже, че главната нормала на кривата пресича оста Ox_3.

- $x_1 = \cos^3 q,\ x_2 = \sin^3 q,\ x_3 = \cos 2q,\ q \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right).$

3.1.2 Обща витлова линия:

Трикратно гладка правилна крива, чиито тангенти във всяка точка сключват постоянен ъгъл с постоянно направление в пространството.

Задача 3.6. *Да се докаже, че ако трикратно гладката правилна крива $c : x = x(s),\ x'^2 = 1,\ s \in \mathcal{I}$ притежава едно от следните пет свойства, то тя притежава и останалите четири:*

- *c е обща витлова линия;*
- *бинормалите на c сключват постоянен ъгъл с постоянно направление;*
- *главните нормали на c са компланарни с постоянна равнина;*
- $\dfrac{\tau}{\varkappa} = const;$
- $x''x'''x^{\prime\mathrm{v}} = 0.$

Задача 3.7. *Да се намерят скаларните и векторните инварианти на общата витлова линия*

$$c : x_1 = a\,\cosh q,\ x_2 = a\,\sinh q,\ x_3 = a\,q;\ q \in \mathcal{I}.$$

Да се докаже, че c лежи

(a) върху хиперболичния цилиндър $S : x_1^2 - x_2^2 = a^2$;

(b) върху цилиндъра с управителна крива верижката $x_1 = a\,\cosh\dfrac{x_3}{a}$ и с оси, успоредни на Ox_2.

Задача 3.8. *Да се намерят скаларните и векторните инварианти на общите витлови линии*

- $c : x_1 = 3q,\ x_2 = 3q^2,\ x_3 = 2q^3;\ q \in \mathcal{I},$
- $x_1 = e^q,\ x_2 = e^{-q},\ x_3 = \sqrt{2}\,q,\ q \in \mathcal{I}.$

3.1.3 Цилиндро-конична витлова линия:

Витлова линия c, която пресича под постоянни ъгли праволинейните образуващи на цилиндър и на прав кръгов конус (с ъгъл 2ϕ при върха O).

Проекцията $\overline{c}$ на c върху равнината Ox_1x_2 е логаритмична спирала.

Цилиндърът е с управителна крива $\overline{c}$ и праволинейни образуващи, успоредни на Ox_3.

Задача 3.9. *Да се намерят скаларните и векторните инварианти на цилиндро-коничната витлова линия*

$$c : x_1 = e^{aq} \sin\phi \cos q,\ x_2 = e^{aq} \sin\phi \sin q,\ x_3 = e^{aq} \cos\phi;\ a = const.$$

3.2 Естествени уравнения на правилна крива

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s), \quad s \in \mathcal{I}$$

Задача 3.10. *Естествените уравнения на правилната крива c са*

$$\varkappa = \alpha = const,\ \tau = \beta = const \neq 0.$$

Да се намерят координатно-параметрични уравнения на кривата.

Задача 3.11. *Бинормалите на четирикратно гладка правилна пространствена крива пресичат постоянна права. Да се намерят естествени уравнения на кривата, ако*

$$\tau = a = const.$$

Задача 3.12. *Да се намерят координатно-параметрични уравнения на правилната крива c, зададена с естествените си уравнения*

$$c : \varkappa = \frac{\alpha}{s},\ \alpha = const;\ \tau = \frac{\beta}{s},\ \beta = const;\ s \in \mathbb{R}^+$$

в случаите $(a)\ \alpha = \beta = 1,\ \ (b)\ \alpha \neq \beta.$

Задача 3.13. *Да се намерят координатно-параметрични уравнения на общата витлова линия*

$$c : \frac{\tau}{\varkappa} = \alpha = const \neq 0.$$

Задача 3.14. *Нека $c : x = x(s),\ x'^2 = 1$ е трикратно гладка правилна пространствена крива.*

Кривата $\overline{c} : \overline{x} = x(s) + \int b(s)ds$, където $b(s)$ е бинормалният вектор на кривата c, се нарича **съответна (спрегната) крива** *на кривата c.*

Ако $\overline{c}$ е от класа $\mathcal{C}^3$ и е правилна, то да се изразят скаларните и векторните инварианти на $\overline{c}$ чрез тези на c в съответните им точки.

Задача 3.15. *Да се намерят кривината и торзията на съответната крива на витловата линия*

$$c : x_1 = e^q \cos q,\ x_2 = e^q \sin q,\ x_3 = e^q;\ q \in \mathcal{I}.$$

3.2.1 Оскулачна окръжност в точка на правилна линия

Нека x е фиксирана точка върху двукратно-гладката правилна линия $c : x = x(q),\ q \in \mathcal{I}$, $t\,n\,b$ е триедърът на Френе за кривата в точката x, а $\varkappa$ е кривината на кривата в точката x.

Разглеждаме окръжността k с кривина $\varkappa$, която минава през x и за която $t\,n\,b$ е триедър на Френе в точката x. Тази окръжност лежи в оскулачната равнина на кривата c в точката x, има за център точката $z = x + \dfrac{1}{\varkappa}\,n$ и за радиус $\varrho = \dfrac{1}{\varkappa}$.

Окръжността k се нарича **оскулачна окръжност** на кривата c в точката x, а центърът ѝ се нарича **център на кривината** на кривата c в точката x.

Задача 3.16. *Нека $c : x = x(s),\ x'^2 = 1$ е правилна пространствена крива с постоянна кривина $\varkappa$. Да се докаже, че геометричното място на центровете на кривина на c е крива, която е перпендикулярна на оскулачната равнина на c в съответните точки и има постоянна кривина $\overline{\varkappa} = \varkappa$.*

Задача 3.17. *Да се докаже, че ако точките на две двукратно гладки правилни криви c и $\overline{c}$ са в такова взаимно-еднозначно съответствие, че в съответните точки допирателните към кривите са успоредни, то главните им нормали в тези точки са също успоредни.*

3.3 Крива на Bertrand:

Правилна крива c, за която съществува правилна крива $\overline{c}$ със същите главни нормали в съответните точки.

Задача 3.18. *Да се докаже, че ако $c \in \mathcal{C}^3$, $\overline{c} \in \mathcal{C}^3$ са съответни една на друга криви на Бертран, то*

- *разстоянието между съответните точки на c и $\overline{c}$ е константна величина ;*
- *ъгълът $(t, \overline{t})_e$ в съответните точки е константен;*
- *съществува линейна връзка между кривината и торзията на всяка от кривите c и $\overline{c}$.*

Задача 3.19. *Да се докаже, че обикновената витлова линия е крива на Бертран.*

Задача 3.20. *Да се докаже, че ако кривината и торзията на една трикратно гладка правилна крива удовлетворяват равенството*

$$A\varkappa + B\tau = C,\ A = const,\ B = const,\ C = const,$$

то тя е или обща витлова линия, или крива на Бертран.

3.4 Крива на Вивиани:

Сфера S_1 с радиус $2a$ е пресечена с кръгов цилиндър S_2, чийто диаметър е равен на радиуса на сферата и една от образуващите му минава през центъра на сферата.

Пресечницата на S_1 и S_2 се нарича *крива на Вивиани.*

Задача 3.21. *За кривата на Вивиани да се намерят:*

- *параметрични уравнения;*
- *кривината и точките на изправяне;*
- *торзията и дъгите от кривата, върху които торзията запазва знака си;*
- *триедрите на Френе в равнинните точки и в точките на самопресичане;*
- *оскулачните окръжности в равнинните точки и в точките на самопресичане.*

Задача 3.22. *Дадена е правилната крива*

$$c : x_1 = a(q - \sin q),\ x_2 = a(1 - \cos q),\ x_3 = 4a \sin \frac{q}{2},\ q \in \mathcal{I}.$$

От всяка точка на кривата по главната нормала към центъра на кривина е нанесена отсечка с дължина $d = 4a^2\varkappa$. Да се намери уравнение на кривата, образувана от втория край на тези отсечки, и да се докаже, че тя е равнинна.

4 Равнинни криви линии

$$c : X = X(s),\ X'^2(s) = 1,\ s \in \mathcal{I}\ \Rightarrow$$

$$t(s) = X'(s), \quad n(s) = \frac{X''(s)}{|X''(s)|}, \quad \varkappa(s) = \sqrt{X''^2(s)}, \quad \tau(s) \equiv 0.$$

$$T(s) := t(s),\ N(s) := \varepsilon\, n(s),\ \varepsilon = \pm 1\ \Rightarrow\ T'(s) = \varepsilon\, \varkappa(s)\, N(s).$$

$$\mathcal{K} := \varepsilon\, \varkappa(s)\ \Rightarrow\ T' = \mathcal{K}\, N, \quad N' = -\mathcal{K}\, T$$

- $\mathcal{K} > 0$ $(\varepsilon = +1)$ $\Rightarrow$ N е насочен към "вътрешността" на c;
- $\mathcal{K} < 0$ $(\varepsilon = -1)$ $\Rightarrow$ N е насочен към "външността" на c;
- $\mathcal{K} = 0$ $\Rightarrow$ точка на изправяне на c.

Тангентен ъгъл на равнинна линия

$$(Oe_1e_2) \quad c : X = X(q), \quad \dot{X}^2 \neq 0, \quad \forall\, q \in \mathcal{I}; \quad \theta := \angle(e_1, T)\ \Rightarrow$$

$$T(\cos\theta, \sin\theta),\ N(-\sin\theta, \cos\theta), \quad \mathcal{K} = \theta'(s) \neq 0, \quad \mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{K}}\ \Rightarrow\ \theta = \int_0^s \mathcal{K}(s) ds + \theta_0$$

$$c : \left| \begin{array}{ll} x_1 = \int \mathcal{R}(\theta) \cos\theta\, d\theta + x_{10} & = \int_0^s \cos(\theta(s))\, ds + x_{10}, \\ x_2 = \int \mathcal{R}(\theta) \sin\theta\, d\theta + x_{20} & = \int_0^s \sin(\theta(s))\, ds + x_{20}. \end{array} \right.$$

Еволюта е геометричното място $\overline{c}$ на центровете на кривина на дадена крива c. Кривата c се нарича *еволвента* на кривата $\overline{c}$.

Задача 4.1. *Да се намери еволюта на елипсата*

$$c : x_1 = a\,\cos q, \quad x_2 = b\,\sin q, \quad q \in \mathcal{I}, \quad a, b = const > 0.$$

Задача 4.2. *Да се намери еволюта на хиперболата*

$$c : x_1 = a\,\cosh q, \quad x_2 = b\,\sinh q, \quad q \in \mathcal{I}, \quad a, b = const > 0.$$

Задача 4.3. *Да се намери еволюта на параболата*

$$c : x_1 = \frac{q^2}{2a}, \quad x_2 = q, \quad q \in \mathbb{R}, \quad a = const > 0.$$

Задача 4.4. Епициклоида: *Траекторията c на фиксирана точка M от окръжността $\{C; r\}$, търкаляща се външно (без хлъзгане) по фиксираната окръжност $\{O; R\}$.*

$$c : \left| \begin{array}{l} x_1 = (m+1)R\,\cos(m\varphi) - mR\,\cos((m+1)\varphi), \\ x_2 = (m+1)R\,\sin(m\varphi) - mR\,\sin((m+1)\varphi), \end{array} \right. \quad m := \frac{r}{R}, \quad \varphi := \angle OCM.$$

Да се намери естественото уравнение и еволюта на c.

Задача 4.5. *Епициклоида с параметър $m = 1$ се нарича* **кардиоида**. *Да се намери естественото уравнение и еволюта на кардиоидата.*

Задача 4.6. Циклоида: *Траекторията c на фиксирана точка M от окръжността $\{C; r\}$, която се търкаля без хлъзгане по права линия.*

$$c : \left| \begin{array}{l} x_1 = r(\varphi - \sin\varphi), \\ x_2 = r(1 - \cos\varphi), \end{array} \right. \quad \varphi \in \mathcal{I}.$$

Да се намери естественото уравнение и еволюта на циклоидата.

Задача 4.7. Хипоциклоида: *Траекторията c на фиксирана точка M от окръжността $\{C; r\}$, търкаляща се вътрешно (без хлъзгане) по фиксираната окръжност $\{O; R\}$.*

$$c : \left| \begin{array}{l} x_1 = -(m-1)R\,\cos(m\varphi) + mR\,\cos((m-1)\varphi), \\ x_2 = -(m-1)R\,\sin(m\varphi) + mR\,\sin((m-1)\varphi), \end{array} \right. \quad m := \frac{r}{R} < 1, \quad \varphi := \pi - \angle OCM.$$

Да се намери естественото уравнение и еволюта на c.

Задача 4.8. *Хипоциклоида с параметър $m = 1/4$ се нарича* **астроида**. *Да се намери естественото уравнение и еволюта на астроидата.*

Задача 4.9. Еволвента на окръжност: *Траекторията c на фиксирана точка от права линия, която се търкаля (без хлъзгане) по неподвижна окръжност $k\{O;R\}$.*

$$c: \left| \begin{array}{l} x_1 = R(\cos\varphi + \varphi\,\sin\varphi), \\ x_2 = R(\sin\varphi - \varphi\,\cos\varphi). \end{array} \right.$$

Да се докаже, че

- *еволвентата c на окръжността $k\{O;R\}$ пресича ортогонално допирателните към окръжността;*
- *център на кривина на еволвентата c на k във всяка точка от c е допирната точка на търкалящата се права с окръжността.*

Задача 4.10. *Да се намери крива, чиято еволюта е окръжност.*

Задача 4.11. Верижка: *Траекторията на фокуса на дадена парабола, която се търкаля (без хлъзгане) по фиксирана права линия.*

$$c:\ x_2 = a\,\cosh\frac{x_1}{a}\,, \quad a = const.$$

Да се намерят естественото уравнение, еволюта и еволвента на верижката.

Задача 4.12. Трактриса *е крива линия c, притежаваща следното свойство: дължината a на отсечката (PQ) от допирателната g към c в точката $P \in c$, мерена от допирната точка P до пресечната точка Q на g с постоянна права l, е постоянна величина (константа).*

$$c: \left| \begin{array}{l} x_1 = a\,\ln|\tan\frac{\varphi}{2}| + a\,\cos\varphi + x_{10}, \\ x_2 = a\,\sin\varphi, \end{array} \right. \quad \varphi = \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{QP}).$$

Да се намерят естественото уравнение и еволюта на трактрисата.

Задача 4.13. Архимедова спирала: *Траекторията на точка M, която се движи равномерно по права g, а правата g се върти равномерно около своя неподвижна точка P (полюс).*

Разстоянието на произволна точка M до полюса P е пропорционално на ъгъла на въртене φ.

$$c:\ |PM| = r(\varphi) = a\,\varphi, \quad a = const \in \mathbb{R}.$$

Да се намерат естествени уравнения на Архимедовата спирала.

Задача 4.14. Хиперболичната спирала *в полярни координати има уравнение, в което между полярния радиус и полярния ъгъл съществува обратна пропорционалност. Когато полярният ъгъл клони към 0, хиперболичната спирала проявява асимптотични свойства. Ако полярният ъгъл нараства неограничено, спиралата се навива безкрайно около центъра си, без да го достига.*

$$c := \{M(r,\varphi) \mid r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}\},\ a = const.$$

Да се намерят естествени уравнения на хиперболичната спирала.

Задача 4.15. Логаритмична спирала: *Разстоянието на произволна точка M до фиксирана точка O (полюс) расте експоненциално с ъгъла φ.*

$$c := \{M(r,\varphi) \mid r = e^{a\,\varphi}\},\ a = const > 0.$$

Да се намерят естествени уравнения на логаритмичната спирала.

Задача 4.16. *Дадени са точките F_1 и F_2, разстоянието между които е $2a > 0$.*

Лемниската *е геометричното място на точки M, за които произведението от разстоянията $r_1 = |F_1M|$ и $r_2 = |F_2M|$ е константата a^2: $r_1 r_2 = a^2$.*

Да се намери уравнение на лемнискатата в декартови и полярни координати.

Задача 4.17. *Да се намерят координатно-параметрични уравнения на кривите със следните естествени уравнения:*

(a) $\rho = \dfrac{s^2}{a} + a,\ a = const > 0$ *(верижка);*

(b) $\rho^2 = 2as,\ a = const > 0,\ s > 0$ *(еволвента на окръжност);*

(c) $\dfrac{s^2}{a^2} + \dfrac{\rho^2}{b^2} = 1,\ a \neq b,\ a = const > 0,\ b = const > 0$ *(епи(хипо)циклоида).*

ЗАДАЧИ от ТЕОРИЯ НА ПОВЪРХНИНИТЕ

5 Гладки повърхнини в евклидовото пространство

$$S:\ \mathcal{D}\ \to\ \mathbb{R}^3 \mid \quad (u,v) \in \mathcal{D}\ \mapsto\ x(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

$$S:\ x = x(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D};\ x_u := \frac{\partial x}{\partial u} \in \mathcal{C}^r,\ x_v := \frac{\partial x}{\partial v} \in \mathcal{C}^r;\ x_u \times x_v \neq \overrightarrow{0}\ \ \forall\,(u,v) \in \mathcal{D}.$$

$$Ox_1x_2x_3: \quad x = x(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)); \quad (u,v) \in \mathcal{D}$$

$$x_u \times x_v \neq \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; rank \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \quad (u,v) \in \mathcal{D}.$$

Гладки линии върху повърхнина:

$$c: \; u = u(q), \; v = v(q); \; u(q) \in \mathcal{C}^1, \; v(q) \in \mathcal{C}^1; \; (\dot{u}, \dot{v}) \neq (0,0), \quad q \in \mathcal{I}$$

$$c \subset S: \; x(q) = x(u(q), v(q)) \; \forall \, q \in \mathcal{I}, \; (u,v) \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; \dot{x} = \dot{u}\, x_u + \dot{v}\, x_v \neq \overrightarrow{0} \; \forall \, q \in \mathcal{I}$$

$$c_1 \subset S: \; x = x(u, v_0), \; u \in \mathcal{I}, \; v_0 = const; \quad c_2 \subset S: \; x = x(u_0, v), \; v \in \mathcal{I}, \; u_0 = const$$

Допирателна равнина β към повърхнината S в точка $x_0 = x(u_0, v_0)$ от S

$$\beta: \; y = x_0 + \lambda\, x_u + \mu\, x_v, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{l} = \frac{x_u \times x_v}{\sqrt{(x_u \times x_v)^2}} \;\perp\; \beta \;\Rightarrow\; \beta: \; l(y - x_0) = 0$$

5.1 Първа основна форма на повърхнина

$$E := x_u^2, \quad F := x_u\, x_v, \quad G := x_v^2 \;\Rightarrow\; I(\lambda, \mu) := E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$$

$$F = 0 \;\Leftrightarrow\; x_u \;\perp\; x_v \;\Leftrightarrow\; c_1 \;\perp\; c_2$$

$$p = \lambda\, x_u + \mu\, x_v \;\Rightarrow\; \sqrt{p^2} = \sqrt{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2} = \sqrt{I(\lambda, \mu)}$$

$$\overline{p} = \overline{\lambda}\, x_u + \overline{\mu}\, x_v \;\Rightarrow\; \cos(p, \overline{p}) = \frac{E\,\lambda\,\overline{\lambda} + F\,(\lambda\,\overline{\mu} + \mu\,\overline{\lambda}) + G\,\mu\,\overline{\mu}}{\sqrt{I(\lambda, \mu)}\sqrt{I(\overline{\lambda}, \overline{\mu})}}$$

$$p \;\perp\; \overline{p} \;\Leftrightarrow\; E\,\lambda\,\overline{\lambda} + F\,(\lambda\,\overline{\mu} + \mu\,\overline{\lambda}) + G\,\mu\,\overline{\mu} = 0$$

$$c: \; x = x(u(q), v(q)), \; q \in [a,b] \;\Rightarrow\; s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2}\, dq = \int_a^b \sqrt{I(\dot{u}, \dot{v})}\, dq$$

$$\sigma(S_0) = \int\int_{\mathcal{D}_0} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int\int_{\mathcal{D}_0} |x_u \times x_v|\, du\, dv$$

Задача 5.1. *Намерете първата основна форма и допирателната равнина в произволна точка на повърхнините:*

(a) $S: x_1 = u,\ x_2 = v,\ x_3 = 0;\ u, v \in \mathbb{R}$.

(b) $S: x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = r\cos\theta;$
$r = const,\ \theta \in (0, 2\pi),\ \varphi \in [0, \pi)$.

(c) $S:\ x_1 = r\cos u,\ x_2 = r\sin u,\ x_3 = v;\ u \in [0, 2\pi),\ v \in (-\infty, \infty);\ r = const$.

Задача 5.2. *Даден е правият хеликоид*

$$S:\ x_1 = u\,\sin v,\ x_2 = u\,\cos v,\ x_3 = v,\ (u, v) \in \mathcal{D}.$$

Да се намерят:

(a) *Първата основна форма на S;*

(b) *Лицето на криволинейния триъгълник $0 \le u \le \sinh v,\ 0 \le v \le v_0$ върху S;*

(c) *Дължините на страните на този триъгълник.*

Задача 5.3. *Дадена е ротационната повърхнина*

$$S:\ x_1 = u\,\cos v,\ x_2 = u\,\sin v,\ x_3 = f(u),\ u \in \mathcal{I},\ v \in (0, 2\pi],\ f \in \mathcal{C}^1.$$

- *Да се намери първата ѝ основна форма.*
- *Да се докаже, че меридианите и паралелите ѝ образуват ортогонална параметрична мрежа.*
- *Да се намерят линиите, които разполовяват ъглите между параметричните ѝ линии.*
- *Да се намерят* ***локсодромите*** *(линиите, които лежат върху S и пресичат меридианите ѝ под постоянен ъгъл) върху S.*
- *Нека $f(u) = 0,5\,u^2$. Да се намерят кривите върху S, които сключват постоянен ъгъл с оста Ox_3.*
- *Нека $f(u) = 0,5u^2$. Да се намери такава крива с върху S, че допирателните равнини към S в точките на с да сключват постоянен ъгъл с равнината $Ox_1\,x_2$.*

Задача 5.4. *Дадена е повърхнината*

$$S:\ x_1 = 2u\cos v,\ x_2 = 2u\sin v,\ x_3 = 2u^2,\ u \in \mathbb{R}^+,\ v \in \mathbb{R}.$$

Да се намери допирателната равнина към повърхнината в произволна нейна точка.

Да се намери крива с върху S така, че допирателните равнини към S в точките на с да сключват постоянен ъгъл с равнината Ox_1x_2.

Задача 5.5. *Да се намерят ортогоналните траектории на правите върху повърхнините:*

- $S: x(u, v) = z(v) + u\,t(v),\ u \in \mathbb{R},\ v \in \mathcal{I}$;

- $S : x(u,v) = z(v) + u\,n(v),\ u \in \mathbb{R},\ v \in \mathcal{I}$;
- $S : x(u,v) = z(v) + u\,b(v),\ u \in \mathbb{R},\ v \in \mathcal{I}$,

  ако $c:\ z = z(v),\ v \in \mathcal{I}$ *е произволна пространствена крива,* $z'^2 = 1$ *и* $t(v),\quad n(v),$ $b(v)$ *са нейните векторни инварианти.*

Задача 5.6. *Дадени са псевдосферата*

$$S:\ x_1 = a\,\sin u\,\cos v,\ x_2 = a\,\sin u\,\sin v,\ x_3 = a\,\ln\tan\left(\frac{u}{2}\right) + a\,\cos u,$$

$$u \in (0, \frac{\pi}{2}),\ v \in [0, 2\pi),\ a = const > 0$$

и системата линии

$$c_\mu:\ \tan u + v = \mu,\ c_\lambda:\ \frac{\sin u}{v+1} = \lambda,\ \mu = const,\ \lambda = const$$

върху нея. Да се намерят:

- *ортогоналните траектории на линиите* c_λ *и* c_μ *върху* S*;*
- *изогоналните траектории под ъгъл* α *на паралелите на* S*.*

5.2 Изображение на Вайнгартен Γ и Гаусово изображение $\mathcal{L}$

$$\Gamma:\ \beta\ \to\ \beta,\qquad \left|\begin{array}{l} \Gamma(x_u) = l_u = \Gamma_1^1\,x_u + \Gamma_1^2\,x_v, \\ \Gamma(x_v) = l_v = \Gamma_2^1\,x_u + \Gamma_2^2\,x_v. \end{array}\right.$$

$$\Gamma:\ p = \lambda\,x_u + \mu\,x_v\ \in \beta\ \mapsto\ \Gamma\,(p) = \lambda\,l_u + \mu\,l_v\ \in \beta$$

Сферично (**Гаусово**) изображение $\mathcal{L}$ на нормална околност S_0 на точката $x_0 = x(u_0, v_0)$ от повърхнината S върху околност $\overline{S_0} = \mathcal{L}(S_0)$ на точката $\overline{x_0} = \mathcal{L}(x_0)$ от единичната (Гаусовата) сфера $\Sigma(O;1)$:

$$\mathcal{L}:\ x = x(u,v) \in S_0 \subset S\ \mapsto\ \overline{x} = l(u,v) \in \overline{S_0} \subset \Sigma(O;1)$$

$$\mathcal{L}:\ c \subset S_0\ \wedge\ c : x = x(u(q), v(q))\ \mapsto\ \overline{c} \subset \overline{S_0}\ \wedge\ \overline{c} : \overline{x} = l(u(q), v(q));\ q \in \mathcal{I}$$

$$\mathcal{L}_*:\ \beta\,|_{x_0}\ \mapsto\ \overline{\beta}\,|_{\overline{x}_0}\ \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_*:\ \dot{x} = \dot{u}\,x_u + \dot{v}\,x_v\ \mapsto\ \dot{l} = \dot{u}\,l_u + \dot{v}\,l_v = \Gamma(\dot{x})\ \Rightarrow\ \mathcal{L}_* \equiv \Gamma$$

Диференциалът $\mathcal{L}_*$ на сферичното изображение $\mathcal{L}$ е изображението на Вайнгартен Γ за повърхнината S.

Задача 5.7. *Дадена е повърхнината*

$$S : x_1 = f(u)\,\cos v,\ x_2 = f(u)\,\sin v,\ x_3 = g(u),\ v \in (0, 2\pi],\ u \in \mathcal{I}.$$

Да се докаже, че нормалата към S в произволна нейна точка лежи в равнина през оста Ox_3.

Ако $f(u) = 2 + \sin u,\ g(u) = u$, да се намери образът на S върху Гаусовата сфера.

Да се намерят точките на негладкост на S.

5.3 Втора основна форма на повърхнина

$$l\,x_u = 0,\ l\,x_v = 0\ \Rightarrow\ l\,x_{uu} = -l_u\,x_u,\ l\,x_{uv} = -l_u\,x_v = -l_v\,x_u,\ l\,x_{vv} = -l_v\,x_v$$

$$L := l\,x_{uu},\ M := l\,x_{uv},\ N := l\,x_{vv}\ \Rightarrow\ II(\lambda,\mu) := L\,\lambda^2 + 2M\,\lambda\,\mu + N\,\mu^2$$

$$p = \lambda\,x_u + \mu\,x_v,\ \Gamma(p) = \lambda\,l_u + \mu\,l_v\ \Rightarrow\ \Gamma(p)\,p = -II(\lambda,\mu)$$

$$\overline{p} = \overline{\lambda}\,x_u + \overline{\mu}\,x_v\ \Rightarrow\ -\Gamma(p)\,\overline{p} = L\,\lambda\,\overline{\lambda} + M\,(\lambda\,\overline{\mu} + \mu\,\overline{\lambda}) + N\,\mu\,\overline{\mu} = -p\,\Gamma(\overline{p})$$

5.3.1 Спрегнати тангенти g_1, g_2 върху повърхнина

$$g_1\ \|\ p,\ g_2\ \|\ \overline{p}\quad\wedge\quad -p\,\Gamma(\overline{p}) = L\,\lambda\,\overline{\lambda} + M\,(\lambda\,\overline{\mu} + \mu\,\overline{\lambda}) + N\,\mu\,\overline{\mu} = 0$$

$$M = 0\quad\Leftrightarrow\quad x_u\,\Gamma(x_v) = x_v\,\Gamma(x_u) = 0$$

5.4 Гаусова ($\mathcal{K}$) и средна ($\mathcal{H}$) кривина на повърхнина

$$\Gamma :\quad \left|\begin{array}{l} \Gamma(x_u) = l_u = \Gamma_1^1\,x_u + \Gamma_1^2\,x_v, \\ \Gamma(x_v) = l_v = \Gamma_2^1\,x_u + \Gamma_2^2\,x_v. \end{array}\right.\quad\Rightarrow$$

$$\Gamma_1^1 = \frac{FM - GL}{EG - F^2},\quad \Gamma_1^2 = \frac{FL - EM}{EG - F^2},\quad \Gamma_2^1 = \frac{FN - GM}{EG - F^2},\quad \Gamma_2^2 = \frac{FM - EN}{EG - F^2}$$

$$\Gamma(p) = \nu^*\,p\quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{cc} \Gamma_1^1 - \nu^* & \Gamma_2^1 \\ \Gamma_1^2 & \Gamma_2^2 - \nu^* \end{array}\right| = \nu^{*2} - (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^2)\,\nu^* + (\Gamma_1^1\,\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2\,\Gamma_2^1) = 0$$

$$\mathcal{K} := \det\Gamma = \Gamma_1^1\,\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2\,\Gamma_2^1 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$\mathcal{H} := -\frac{1}{2}\,trace\,\Gamma = -\frac{1}{2}\,(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\nu^{*2} + 2\,\mathcal{H}\,\nu^* + \mathcal{K} = 0\quad\Rightarrow\quad \mathcal{H} = -\frac{1}{2}\,(\nu_1^* + \nu_2^*),\quad \mathcal{K} = \nu_1^*\,\nu_2^*$$

5.4.1 Оскулачен параболоид в точка $x = x(u,v)$ от повърхнината S

$$S_0 := \{(u,v,\varrho) \,|\, (u,v) \in \mathcal{D} \ \wedge \ 2\,\varrho(u,v) = L\,u^2 + 2\,M\,u\,v + N\,v^2\}$$

- $M^2 - LN < 0$: S_0 е елиптичен параболоид, x е елиптична точка $(\mathcal{K} > 0)$;
- $M^2 - LN > 0$: S_0 е хиперболичен параболоид, x е хиперболична точка $(\mathcal{K} < 0)$;
- $M^2 - LN = 0 \wedge (L,M,N) \neq (0,0,0)$: S_0 е параболичен цилиндър, x е параболична точка $(\mathcal{K} = 0)$;
- $L = M = N = 0$: S_0 е равнина, x е равнинна точка $(\mathcal{K} = 0,\ \mathcal{H} = 0)$.

Задача 5.8. *Да се докаже, че повърхнината, която се състои само от равнинни точки, лежи върху равнина.*

Задача 5.9. *Да се намерят Гаусовата и средната кривина в произволна точка от повърхнината* $S:\ x_3 = f(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Задача 5.10. *Дадена е ротационната повърхнина*

$$S:\ x_1 = u\,\cos v,\ x_2 = u\,\sin v,\ x_3 = f(u),\ (u,v) \in \mathcal{D},\ f \in \mathcal{C}^2.$$

Да се намерят $E,\ F,\ G;\ L,\ M,\ N;\ \mathcal{K},\ \mathcal{H}$ *в произволна точка от повърхнината* S.

5.5 Трета квадратична форма на повърхнина

$$III(\lambda,\mu) = \gamma^2(p)\,p = (\gamma(p))^2 = l_u^2\,\lambda^2 + 2l_u\,l_v\,\lambda\,\mu + l_v^2\,\mu^2$$

$$III(\lambda,\mu) - 2\mathcal{H}\,II(\lambda,\mu) + \mathcal{K}\,I(\lambda,\mu) \equiv 0$$

6 Скаларни инварианти на линия върху повърхнина. Геометрични семейства линии върху повърхнина

6.1 Нормална кривина ν, геодезична торзия α и геодезична кривина γ на гладка линия върху повърхнина

$$S:\ x = x(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D};\quad c:\ u = u(s),\ v = v(s),\ (u',v') \neq (0,0);\quad c \subset S \quad \forall\, s \in \mathcal{I}$$

$$\forall\, x \in c \subset S \quad \exists \quad l,\ t,\ \mathbf{p} := l \times t \ \wedge\ (x; t\,\mathbf{p}\,l):$$

$$\left|\begin{array}{llll} t' = & & \gamma\,\mathbf{p} & +\nu\,l \\ \mathbf{p}' = & -\gamma\,t & & +\alpha\,l \\ l' = & -\nu\,t & -\alpha\,\mathbf{p} & \end{array}\right.$$

ν - нормална кривина в точка от повърхнината

α - геодезична торзия в точка от повърхнината

γ - геодезична кривина в точка от гладка линия върху повърхнината

$$\left|\begin{array}{l} \nu := l\,t' = -l'\,t = -l'\,x' = L\,u'^2 + 2M\,u'\,v' + N\,v'^2 = II(u',v'), \\ \alpha := \mathbf{p}'\,l = -l'\,\mathbf{p} = t\,l\,l' = x'\,l\,l' = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} Eu'+Fv' & Fu'+Gv' \\ Lu'+Mv' & Mu'+Nv' \end{vmatrix} \\ \gamma = t'\,\mathbf{p} = -\mathbf{p}'\,t = t\,t'\,l \end{array}\right.$$

$$\forall\, x \in c \quad \exists\,(x; t\,n\,b) \;\wedge\; t' = \varkappa\, n \;\Rightarrow\; \nu = \varkappa\cos\theta,\; \theta = \angle(n,l)$$

$$c:\; u = u(q),\; v = v(q);\; q \in \mathcal{I} \;\Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} \nu = \dfrac{II(\dot u, \dot v)}{I(\dot u, \dot v)} = \varkappa\cos\theta \\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}\sqrt{I(\dot u,\dot v)}} \begin{vmatrix} E\dot u + F\dot v & F\dot u + G\dot v \\ L\dot u + M\dot v & M\dot u + N\dot v \end{vmatrix} \end{array}\right.$$

Теорема 6.1. Теорема на Meusnier. *Нека x е точка върху повърхнината S, а g е тангента към S в точката x с нормална кривина $\nu \neq 0$. Геометричното място на центровете на кривината на правилните криви върху S, които се допират до g в x, е окръжност с диаметър $x\,z_n$, където z_n е центърът на кривината на нормалното сечение, определено от допирателната g.*

6.2 Асимптотични линии върху повърхнина

Една тангента g към повърхнината S в точка x от повърхнината се нарича **асимптотична**, ако е самоспрегната, т.е.

$$g \;\parallel\; p = \lambda\, x_u + \mu\, x_v \;\wedge\; L\,\lambda^2 + 2M\,\lambda\,\mu + N\,\mu^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \nu_g = 0.$$

- x е равнинна точка $\Rightarrow$ всяка тангента през x е асимптотична;
- x е параболична точка $\Rightarrow$ през x минава точно една асимптотична тангента;
- x е елиптична точка $\Rightarrow$ през x не минават асимптотични тангенти;
- x е хиперболична точка $\Rightarrow$ през x минават точно две асимптотични тангенти.

Линията $c \subset S$ се нарича **асимптотична**, ако тангентата към c във всяка нейна точка е асимптотична.

Една двукратно гладка линия $c \subset S$ е асимптотична точно когато

$$l \;\times\; (\dot x \times \ddot x) = \overrightarrow{0},$$

т.е. тя е или права линия или във всяка нейна точка оскулачната ѝ равнина съвпада с тангенциалната равнина към повърхнината.

Теорема 6.2. ***Теорема на Белтрами - Енепер.*** *Ако c е правилна асимптотична линия върху повърхнината S с Гаусова кривина $\mathcal{K}$, то торзията τ на c удовлетворява равенството*

$$\tau^2 = -\mathcal{K}.$$

В околност на хиперболична точка от повърхнината параметричните линии са асимптотични точно когато

$$L = N = 0.$$

Една повърхнина се нарича **минимална**, ако средната ѝ кривина във всяка нейна точка е равна на нула.

Една повърхнина с отрицателна Гаусова кривина е минимална точно когато във всяка нейна точка асимптотичните ѝ линии са перпендикулярни.

Задача 6.3. *Нека S е двукратно гладка повърхнина. Да се докаже, че ако двойката асимптотични линии във всяка точка от S се пресичат под ъгъл θ, то Гаусовата кривина $\mathcal{K}$ и средната кривина $\mathcal{H}$ удовлетворяват уравнението*

$$\mathcal{K}\,\cos^2\theta + \mathcal{H}^2\,\sin^2\theta = 0.$$

Задача 6.4. *Да се намерят асимптотичните линии и средната кривина на катеноида*

$$S:\ x_1 = a\,\cosh\frac{u}{a}\,\cos v,\ x_2 = a\,\cosh\frac{u}{2}\,\sin v,\ x_3 = u,\ (u,v)\in\mathcal{D},\ a = const \neq 0.$$

Задача 6.5. *Дадена е ротационната повърхнина*

$$S:\ x_1 = u\,\cos v,\ x_2 = u\,\sin v,\ x_3 = f(u),\ (u,v)\in\mathcal{D}$$

Да се определи функцията $f(u)$ така, че S да е минимална.

Задача 6.6. *Дадена е повърхнината*

$$S:\ x_1 = u,\ x_2 = v,\ x_3 = f(u) - f(v),\ (u,v)\in\mathcal{D}.$$

Да се определи функцията f така, че асимптотичните линии на повърхнината да са перпендикулярни.

Задача 6.7. *Дадена е повърхнината*

$$S:\ x_1 = u\,\cos v,\ x_2 = u\,\sin v,\ x_3 = v + f(u),\ (u,v)\in\mathcal{D},$$

където $f(u)$ е поне два пъти непрекъснато диференцируема функция. Да се определи $f(u)$ така, че ортогоналните траектории на линиите $u = const$ да са асимптотични линии за S.

Задача 6.8. *Да се намери такова параметрично представяне на повърхнината*

$$S:\ x_1^2\,x_3 = a\,x_2^2,$$

при което параметричната мрежа да е асимптотична.

Задача 6.9. *Повърхнината S е образувана от главните нормали на трикратно гладката правилна пространствена крива c. Да се докаже, че c е асимптотична линия за S.*

Задача 6.10. *Дадена е повърхнината*

$$S:\ x_1 = u^2 + v,\ x_2 = u^3 + u\,v,\ x_3 = u^4 + \frac{2}{3}\,u^2\,v,\ (u,v) \in \mathcal{D}.$$

Да се намерят праволинейните образуващи на S.

Да се докаже, че оскулачната равнина във всяка точка на кривата $v = 0$ съвпада с допирателната равнина към S в тази точка.

Да се намерят ортогоналните проекции върху равнината x_1Ox_2 на онези асимптотични линии, които минават през точката $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

6.3 Геодезична торзия на гладка линия върху повърхнина

$$c \subset S,\ \theta = \angle(n,l)\ \Rightarrow\ \mathbf{p} = \sin\theta\, n - \cos\theta\, b,\ l = \cos\theta\, n + \sin\theta\, b\ \Rightarrow\ \alpha = \theta' + \tau$$

$$III(u',v') = (l_u\,u' + l_v\,v')^2 = l'^2 = \nu^2 + \alpha^2 = 2\nu\,\mathcal{H} - \mathcal{K}\ \Rightarrow$$

$$\nu^2 - 2\nu\,\mathcal{H} + \mathcal{K} = -\alpha^2$$

6.4 Главни линии върху повърхнина

Една тангента g към повърхнината S в точка x от S е **главна тангента** за S, ако е перпендикулярна на спрегнатата си тангента $\overline{g}$.

$$g\ \parallel\ p = \lambda\,x_u + \mu\,x_v\ \wedge\ \overline{g}\ \parallel\ \overline{p} = \overline{\lambda}\,x_u + \overline{\mu}\,x_v\ \Rightarrow\ \Gamma(p)\,\overline{p} = 0\ \wedge\ p\ \perp\ \overline{p}\ \Leftrightarrow$$

$$L\,\lambda\,\overline{\lambda} + M\,(\lambda\,\overline{\mu} + \mu\,\overline{\lambda}) + N\,\mu\,\overline{\mu} = 0\ \wedge\ E\,\lambda\,\overline{\lambda} + F\,(\lambda\,\overline{\mu} + \mu\,\overline{\lambda}) + G\,\mu\,\overline{\mu} = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} E\,\lambda + F\,\mu & F\,\lambda + G\,\mu \\ L\,\lambda + M\,\mu & M\,\lambda + N\,\mu \end{vmatrix} = 0$$

Една точка x върху повърхнината S се нарича **омбилична**, ако в нея

$$L = k\,E,\ M = k\,F,\ N = k\,G.$$

Всяка тангента през омбилична точка е главна.

През неомбилична точка от повърхнината минават точно две главни тангенти.

Една двукратно гладка повърхнина се състои само от омбилични точки точно когато лежи върху сфера или равнина.

6.4.1 Главни кривини в точка от повърхнина

Нормалните кривини ν_1 и ν_2 на главните тангенти в неомбилична точка от повърхнината се наричат **главни кривини**.

$$\nu^2 - 2\,\mathcal{H}\,\nu + \mathcal{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\,(\nu_1 + \nu_2), \quad \mathcal{K} = \nu_1\,\nu_2 \;\Rightarrow\; \nu_1 = -\nu_1^* \;\wedge\; \nu_2 = -\nu_2^*$$

Една гладка линия $c : u = u(q),\ v = v(q),\ q \in \mathcal{I}$ върху повърхнина S се нарича **главна** (или **линия на кривина**), ако тангентите й във всяка нейна точка са главни, т.е.

$$\alpha = \begin{vmatrix} E\dot{u} + F\dot{v} & F\dot{u} + G\dot{v} \\ L\dot{u} + M\dot{v} & M\dot{u} + N\dot{v} \end{vmatrix} = 0.$$

Параметричната мрежа в околност на неомбилична точка е главна точно когато

$$F = M = 0.$$

Задача 6.11. *За повърхнината*

$$S : x_1 = u^2 + v^2, \quad x_2 = u^2 - v^2, \quad x_3 = u\,v, \quad (u, v) \in \mathcal{D}$$

да се намерят:

- *главните кривини в точката* $P(2, 0, 1)$*;*
- *нормалната кривина на нормалното сечение в* P*, получено от равнина, минаваща през тангентата на линията* $v = u^2$*.*

Задача 6.12. *Да се намерят асимптотичните линии,* $\mathcal{K}$*,* $\mathcal{H}$ *и главните кривини* ν_1*,* ν_2 *на псевдосферата*

$$S :\ x_1 = \sin u\,\cos v,\ x_2 = \sin u\,\sin v,\ x_3 = \cos u + \ln\left(\tan\frac{u}{2}\right),\ u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ v \in [0, 2\,\pi).$$

Задача 6.13. *В произволна точка от хеликоида*

$$S :\ x_1 = u\,\cos v,\ x_2 = u\,\sin v,\ x_3 = a\,v,\ (u, v) \in \mathcal{D},\ a = const \neq 0$$

да се намерят:

- *линиите на кривина;*
- *асимптотичните линии;*
- *Гаусовата и средната кривини;*
- *главните радиуси на кривина;*
- *торзията на асимптотичните линии;*
- *нормалната кривина и геодезичната торзия на линията* $c :\ u - v = \lambda = const$ *върху* S*.*

7 Формула на Ойлер за нормалните кривини.

Нормалните сечения на повърхнината, определени от главните тангенти g_1, g_2, се наричат **главни сечения**. Центровете на кривината на главните сечения се наричат **главни центрове на кривината** в дадената точка.

Спрямо **главна параметризация** на повърхнината S главните кривини ν_1 , ν_2 в дадена точка $x \in S$ са

$$\nu_1 = \frac{L}{E}, \quad \nu_2 = \frac{N}{G}$$

$$g\,\{\exists\, x;\ \|\ p = \lambda\, x_u + \mu\, x_v\} \ \wedge\ \frac{E\,\lambda^2}{E\,\lambda^2 + G\,\mu^2} =: \cos^2\varphi, \quad \frac{G\,\mu^2}{E\,\lambda^2 + G\,\mu^2} =: \sin^2\varphi,\ \varphi = \angle(x_u, p)$$

$$\Rightarrow$$

$$\nu_g = \frac{L\,\lambda^2 + N\,\mu^2}{E\,\lambda^2 + G\,\mu^2} = \frac{L}{E}\,\frac{E\,\lambda^2}{E\,\lambda^2 + G\,\mu^2} + \frac{N}{G}\,\frac{G\,\mu^2}{E\,\lambda^2 + G\,\mu^2} = \nu_1\,\cos^2\varphi + \nu_2\,\sin^2\varphi$$

- За елиптична точка $K = \nu_1\,\nu_2 > 0 \ \Rightarrow\ \nu_2 > \nu_1 > 0 \ \wedge\ \nu_g = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)\,\sin^2\varphi$.
- За хиперболична точка $K = \nu_1\,\nu_2 < 0 \ \Rightarrow\ \nu_2 < 0 < \nu_1 \ \wedge\ \nu_g = \nu_1 - (\nu_1 - \nu_2)\,\sin^2\varphi$.
- За параболична точка $K = \nu_1\,\nu_2 = 0 \ \Rightarrow\ \nu_1 = 0,\ \nu_2 > 0 \ \wedge\ \nu_g = \nu_2\,\sin^2\varphi$.

Задача 7.1. *Докажете, че в хиперболична точка от повърхнина главните тангенти разполовяват ъглите между асимптотичните тангенти.*

Задача 7.2. *Да се докаже, че ако една повърхнина S се допира до постоянна равнина в точките на крива c от S, то точките на кривата c са или параболични или равнинни за повърхнината S.*

Задача 7.3. *Да се докаже, че сумата от нормалните кривини на всяка двойка ортогонални тангенти в дадена точка от повърхнината е константа.*

Задача 7.4. *Да се докаже, че ако средната кривина в една неравнинна точка от повърхнината е равна на нула, то в тази точка има две ортогонални асимптотични тангенти.*

Задача 7.5. *Оскулачната равнина на линия $c \subset S$, тангентата във всяка точка на която не принадлежи на асимптотично направление на повърхнината, сключва постоянен ъгъл с допирателната равнина към S в точките на c. Да се докаже, че c е равнинна линия.*

7.1 Индикатриса на Dupin в точка x от повърхнината S спрямо главна параметризация

$$O := x,\ e_1 := \frac{x_u}{\sqrt{E}},\ e_2 := \frac{x_v}{\sqrt{G}}; \quad \overrightarrow{OP} = X\,e_1 + Y\,e_2\ :\ (\overrightarrow{OP})^2 = X^2 + Y^2 = \frac{1}{|\nu|}$$

$$X := \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\nu|}}\,\cos\varphi, \quad Y := \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\nu|}}\,\sin\varphi; \quad \varepsilon := sign\ \nu$$

$$\mathcal{J} := \{P(X,Y) \in O\,e_1\,e_2 \mid \nu_1\,X^2 + \nu_2\,Y^2 = \varepsilon\}$$

- За елиптична точка $\nu_1 X^2 + \nu_2 Y^2 = 1$ – елипса с главни диаметри g_1 и g_2.
- В омбилична точка индикатрисата е окръжност.
- За хиперболична точка $\nu_1 X^2 - |\nu_2| Y^2 = \pm 1$ – хиперболи с главни диаметри g_1 и g_2 и общи асимптоти.
- За параболична точка $\nu_2 Y^2 = 1$ – двойка прави, успоредни на главната тангента g_1.

$$O := x;\ x_u,\ x_v \ \Rightarrow\ \overrightarrow{OP} = \overline{X}\, x_u + \overline{Y}\, x_v \ :\ \overline{X} = \frac{\varepsilon \cos\varphi}{\sqrt{E\,|\nu|}},\ \overline{Y} = \frac{\varepsilon \sin\varphi}{\sqrt{G\,|\nu|}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{J} = \{P(\overline{X}, \overline{Y}) \in O\, x_u\, x_v \mid L\,\overline{X}^2 + N\,\overline{Y}^2 = \varepsilon\}$$

Оскулачният параболоид S_0 в точка x от повърхнината S

g_1, g_2 са главни тангенти на повърхнината S в неомбиличната точка x.

$$O\, e_1\, e_2\, e_3 :\ O := x,\ e_3 := l,\ e_1 \ \parallel\ g_1,\ e_2 \ \parallel\ g_2$$

$$S :\ x_1 = u,\ x_2 = v,\ x_3 = f(u,v) \ \Rightarrow\ x_3 = f(x_1, x_2),\ f(0,0) = 0,\ f_{x_1}(0,0) = f_{x_2}(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$E = 1,\ F = 0,\ G = 1;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) = L = \nu_1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(0,0) = M = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0) = N = \nu_2$$

$$S_0 :\ x_3 = \frac{\nu_1}{2}\, x_1^2 + \frac{\nu_2}{2}\, x_2^2$$

Нека x е неравнинна точка от повърхнината S, а S_0 е оскулачният параболоид на S в тази точка. Индикатрисата на Dupin в точката x и сечението на повърхнината S (оскулачния параболоид S_0) с равнина, успоредна на допирателната равнина β към S в точката $x \in S$ и лежаща достатъчно близко до β, са подобни криви линии (с точност до апроксимация от първи ред).

Задача 7.6. *Дадена е повърхнината на Енепер*

$$S :\ x_1 = u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ x_2 = v - \frac{v^3}{3} + vu^2,\ x_3 = u^2 - v^2, \quad (u,v) \in \mathcal{D}.$$

Да се докаже:

(a) $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0;$

(b) $L = 2, \quad N = -2, \quad M = 0;$

(c) $\nu_1 = \dfrac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \nu_2 = \dfrac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2};$

(d) линиите на кривина на S са параметричните линии;

(e) асимптотичните линии на S са линиите $u+v=const, \quad u-v=const$.

Задача 7.7. *Даден е Мъобиусовият лист*

$$S:\ x_1=(2-v\,\sin\frac{u}{2})\sin u, \quad x_2=(2-v\,\sin\frac{u}{2})\cos u, \quad x_3=v\,\cos\frac{u}{2}, \quad (u,v)\in\mathcal{D}.$$

Докажете, че Гаусовата кривина на S е

$$\mathcal{K}=\frac{-1}{\left(\frac{1}{4}\,v^2+\left(2-v\,\sin\frac{u}{2}\right)^2\right)^2}\,.$$

Задача 7.8. *Нека $c:\ x=x(s),\ x'^2(s)=1,\ s\in\mathcal{I}$ е правилна пространствена крива без точки на изправяне. Повърхнината*

$$S:\ X(s,v)=x(s)+r\,(n(s)\,\cos v+b(s)\,\sin v), \quad r=const\neq 0, \quad s\in\mathcal{I},$$

*където $n(s)$ е векторът по главната нормала, а $b(s)$ е векторът по бинормалата на c, се нарича **туба** с радиус r около кривата c. Да се изразят чрез скаларните и векторните инварианти на c:*

(a) коефициентите на първата основна форма на S;

(b) единичният нормален вектор към S в произволна точка от S;

(c) коефициентите на втората основна форма на S;

(d) главните кривини в точка от S;

(e) линиите на кривина на S.

Задача 7.9. *Да се докаже, че меридианите на тора*

$$S:\ x_1=(a+r\,\cos u)\,\cos v,\ x_2=(a+r\,\cos u)\,\sin v,\ x_3=r\,\sin u,\ 0<u<2\pi,\ 0<v<2\pi$$

са линии на кривина ($a=const$).

Задача 7.10. *Нека $S:\ x=x(u,v)$ е двукратно гладка повърхнина. Под **паралелна повърхнина** на повърхнината S се разбира повърхнината*

$$\overline{S}:\ y(u,v)=x(u,v)+a\,l(u,v), \quad a=const.$$

- *Докажете, че $y_u\times y_v=(1-2\mathcal{H}\,a+\mathcal{K}\,a^2)\,(x_u\times x_v)$, където $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ са съответно средната и Гаусовата кривина на S;*

- *Докажете, че в точки на гладкост Гаусовата и средната кривина на $\overline{S}$ са съответно*

$$\overline{\mathcal{K}}=\frac{\mathcal{K}}{1-2\mathcal{H}\,a+\mathcal{K}\,a^2}, \quad \overline{\mathcal{H}}=\frac{\mathcal{H}-\mathcal{K}\,a}{1-2\mathcal{H}\,a+\mathcal{K}\,a^2}.$$

8 Праволинейни повърхнини (Роеве прави)

$$\{\alpha(t) \in \mathcal{C}^2,\ w(t) \in \mathcal{C}^2\}:\ \alpha(t) \in \mathbb{R}^3,\ w(t) \in \mathbb{R}^3,\ w(t) \neq \overrightarrow{0},\ t \in \mathcal{I}$$

$$S:\ x(t,u) := \alpha(t) + u.w(t),\ t \in \mathcal{I},\ u \in \mathbb{R},\ |w| = 1\ (\Rightarrow\ w\,w' = 0)$$

$\mathcal{L}_t \subset S:\ t = const, u \in \mathbb{R} -$ **праволинейни образуващи** на повърхнината S

$\alpha = \alpha(t):\ \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3 -$ **управителна крива** на повърхнината S
$\alpha(t) \subset S:\ x = x(t,0),\ t \in \mathcal{I}$ (т.е. $u = const = 0,\ t \in \mathcal{I}$)

$\beta(t) := \alpha(t) - \dfrac{\alpha'\,w'}{w'^2}\,w(t),\ t \in \mathcal{I} -$ **централна крива** (**стрикционна линия**) на праволинейната повърхнина S; $\quad \beta' \perp w'\ (\Rightarrow\ \beta'\,w' = 0)\ \forall\, t \in \mathcal{I}$.

$\lambda(t) := \dfrac{\beta'\,w\,w'}{w'^2},\ t \in \mathcal{I}\ \Rightarrow\ \lambda(t) = \dfrac{\alpha'\,w\,w'}{w'^2},\ t \in \mathcal{I}$
$\lambda(t) -$ **разпределителен параметър** за повърхнината S

Гаусовата кривина на праволинейната повърхнина S е

$$\mathcal{K} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2} \leq 0$$

В точките на гладкост $\mathcal{K} = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 0$, т.е. $\mathcal{K} = 0$ за точките от централната линия на праволинейната повърхнина S.

За точките от повърхнината S, за които $\lambda \neq 0$ е в сила:

$$\tan\angle(l(t,u), l(t,0)) = \frac{u}{|\lambda|}$$

Задача 8.1. *За хиперболичния параболоид*

$$S:\ x_3 = k\,x_1\,x_2,\ k \neq 0$$

да се намерят централната линия и разпределителния параметър.

Задача 8.2. *Да се докаже, че семейството от нормалните вектори към хиперболичния параболоид S в точките на една праволинейна образуваща определя праволинейна повърхнина.*

Задача 8.3. *Нека S_1 е единичната окръжност $x_1^2 + x_2^2 = 1$ в равнината Oe_1e_2 и нека $S_1:\ \alpha = \alpha(s),\ s \in \mathcal{I}$ е параметризирана спрямо дължината на дъгата си s. Нека $\forall\ s \in \mathcal{I}\ \ w(s) := \alpha'(s) + e_3$. Да се намери централната линия и разпределителния параметър на повърхнината*

$$S:\ x(s,u) = \alpha(s) + u(\alpha'(s) + e_3)$$

8.1 Развиваеми праволинейни повърхнини

$$S:\ x(t,u) := \alpha(t) + u.w(t),\ t \in \mathcal{I},\ u \in \mathbb{R},\ |w| = 1$$

Праволинейната повърхнина S е развиваема, ако $\alpha'\, w\, w' \equiv 0$, т.е. разпределителният й параметър е тъждествено равен на 0.

I) $w(t) \times w'(t) \equiv \overrightarrow{0} \Rightarrow w'(t) \equiv \overrightarrow{0} \Rightarrow w(t) = const \Rightarrow S$ е цилиндрична повърхнина.

II) $w(t) \times w'(t) \neq \overrightarrow{0},\ t \in \mathcal{I} \Rightarrow w'(t) \neq \overrightarrow{0},\ t \in \mathcal{I} \Rightarrow S$ не е цилиндрична повърхнина.

II a) $\beta'(t) \neq 0,\ t \in \mathcal{I} \Rightarrow \beta'(t) \parallel w(t) \Rightarrow S$ е тангентната повърхнина на стрикционната линия $\beta(t)$, т.е.

$$S:\ x(t,u) = \beta(t) + u.\beta'(t),\ (t,u) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}.$$

II b) $\beta'(t) = \overrightarrow{0},\ t \in \mathcal{I} \Rightarrow$ стрикционната линия е точка и S е конична повърхнина с връх β.

Задача 8.4. *Да се докаже, че роят от нормалите на правилната повърхнина S в точките на линията $c \subset S$ е развиваем точно когато c е линия на кривина за S.*

Задача 8.5. *Праволинейната повърхнина S е зададена чрез*

$$\alpha(t) = (e^t \cos t - f(t)\sin t,\ e^t \sin t + f(t)\cos t,\ e^t),\ w(t) = (\frac{-\cos t}{\sqrt{3}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}),\ f \in \mathcal{C}^1,\ t \in \mathcal{I}.$$

Да се определи функцията $f(t)$ така, че S да е развиваема и да се намери централната й линия.

Задача 8.6. *Да се докаже, че ако $S:\ x = x(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}$ е трикратно гладка повърхнина, съставена само от параболични точки, то тя е развиваема.*

Задача 8.7. *Дадена е повърхнината*

$$S:\ x_1 = u\cos v,\ x_2 = u\sin v,\ x_3 = v + f(u),\ (u,v) \in \mathcal{D},\ f \in \mathcal{C}^2.$$

Да се определи $f(u)$ така, че S да е развиваема. Да се намерят праволинейните образуващи на S.

Задача 8.8. *Дадена е повърхнината*

$$S:\ x_1 = u\sin v,\ x_2 = u\cos v,\ x_3 = v,\ (u,v) \in \mathcal{D}.$$

Да се докаже, че роят от нормалите към S в точките на линията $c:\ u = \sinh v$ е развиваем и да се намери централната му линия.

Задача 8.9. *Нека S е гладка повърхнина и $\alpha = \alpha(s)$ е крива върху S, отнесена спрямо естествения си параметър s. Да допуснем, че α не се допира до асимптотично направление на повърхнината. Разглеждаме повърхнината*

$$\overline{S}:\ x(s,u) = \alpha(s) + u\frac{l(s) \times l'(s)}{|l'(s)|},$$

където с $l(s)$ е означен единичният нормален вектор на S, разглеждан в точките на кривата $\alpha(s)$. Да се докаже, че $\overline{S}$ е развиваема повърхнина, която в околност на $u = 0$ е гладка и се допира до S в точките на линията $u = 0$.

Задача 8.10. *Нека е дадена обикновената витлова линия*

$$\alpha = \alpha(\cos u, \sin u, au),\ a = const,\ u \in \mathbb{R}.$$

През всяка точка на α прекарваме права, успоредна на равнината Ox_1x_2 и пресичаща оста Ox_3. Получената праволинейна повърхнина е хеликоид:

$$x(u,v) = x(v\cos u, v\sin u, au),\ u \in (0, 2\pi),\ vin\mathbb{R}.$$

Да се докаже, че централната линия на хеликоида е оста Ox_3, а разпределителният й параметър е $\lambda = const$.

Задача 8.11. *Под* ***правоъгълен коноид*** *се разбира праволинейна повърхнина, чиито праволинейни образуващи $\mathcal{L}_t$ пресичат под прав ъгъл фиксирана права g, която няма общи точки с управителната крива $\alpha = \alpha(t),\ t \in \mathcal{I}$.*

Задайте параметрични уравнения на коноида и намерете условията, при които той не е цилиндър.

Намерете централната линия и разпределителния параметър на правоъгълния коноид.

Задача 8.12. *Нека $S:\ x = x(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}$ е гладка повърхнина без параболични и омбилични точки, която е отнесена спрямо главна параметризация. Повърхнините*

$$S_1:\ y(u,v) = x(u,v) + \rho_1\, l(u,v),\ \rho_1 := \frac{1}{\nu_1}, \quad S_2:\ z(u,v) = x(u,v) + \rho_2\, l(u,v),\ \rho_2 := \frac{1}{\nu_2}$$

се наричат ***фокални повърхнини*** *на S.*

- *Нека във всяка точка на S $(\nu_1)_u \neq 0$ и $(\nu_2)_v \neq 0$. Повърхнините S_1 и S_2 са гладки.*
- *В точките на гладкост векторите y_u и y_v са спрегнати в S_1 за всички $(u,v) \in \mathcal{D}$.*

Една фокална повърхнина, например S_1, може да се конструира по следния начин: Разгледайте линията на кривина $x(u, const)$ върху S и постройте развиваемата повърхнина, определена от нормалите към S в точките на линията $x(u, const)$. Централната линия на тази повърхнина лежи върху S_1 и когато линията $x(u, const)$ пробягва S, централната линия пробягва S_1.

9 Уравнения за производните. Условия за интегруемост на производните.

$$S: x = x(u^1, u^2) \in \mathcal{C}^3,\ (u^1, u^2) \in \mathcal{D}$$

$$g_{11} := x_1^2 = E,\ g_{12} = g_{21} := x_1\, x_2 = F,\ g_{22} := x_2^2 = G\ \Rightarrow$$

$$g := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \det g = g_{11}\, g_{22} - (g_{12})^2 = EG - F^2 > 0$$

$$g^{-1} := \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix}, \quad g\, g^{-1} = g^{-1}\, g = I_2\ \Rightarrow\ g_{is}\, g^{sj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$I(\lambda^1, \lambda^2) = g_{ij}\, \lambda^i\, \lambda^j, \quad s = \int_{q_0}^{q} \sqrt{g_{ij}\, \dot{u}^i\, \dot{u}^j}\, dq$$

$$h_{11} := l\, x_{uu} = L,\ h_{12} = h_{21} := l\, x_{uv} = M,\ h_{22} := l\, x_{vv} = N \ \Rightarrow$$

$$h := \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad II(\lambda^1, \lambda^2) = h_{ij}\, \lambda^i\, \lambda^j$$

$$l_i = \Gamma_i^s\, x_s \ \Rightarrow\ \Gamma_i^j = -h_{is}\, g^{js} = -h_i^j$$

Символите на Кристофел Γ_{ij}^l:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^s\, x_s + h_{ij}\, l \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}\, g^{ls}(\partial_i\, g_{js} + \partial_j\, g_{is} - \partial_s\, g_{ij})$$

$$\partial_i\, x_{jk} = \partial_j\, x_{ik} \quad \Rightarrow$$

$$R_{ijk}{}^{\sigma} := \partial_i\, \Gamma_{jk}^{\sigma} - \partial_j\, \Gamma_{ik}^{\sigma} + \Gamma_{jk}^s\, \Gamma_{si}^{\sigma} - \Gamma_{ik}^s\, \Gamma_{sj}^{\sigma} = h_{jk}\, h_i^{\sigma} - h_{ik}\, h_j^{\sigma}$$

Формули на Петерсон - Майнарди - Кодаци

$$\partial_i\, h_{jk} - \partial_j\, h_{ik} + \Gamma_{jk}^s\, h_{si} - \Gamma_{ik}^s\, h_{sj} = 0$$

$$(ijk) \mapsto (122) \wedge (ijk) \mapsto (211) \ \Rightarrow$$

$$(*) \qquad \begin{aligned} &N_u - M_v + \Gamma_{22}^1\, L + \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1)\, M - \Gamma_{12}^2\, N = 0, \\ &L_v - M_u - \Gamma_{12}^1\, L + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\, M + \Gamma_{11}^2\, N = 0 \end{aligned}$$

Теорема 9.1. ***Теорема Egregium на Гаус.*** *Гаусовата кривина на повърхнината се изразява само чрез коефициентите на първата основна форма и техните производни.*

$$R_{ijkl} := R_{ijk}^s\, g_{sl} = (\partial_i\, \Gamma_{jk}^{\sigma} - \partial_j\, \Gamma_{ik}^{\sigma} + \Gamma_{jk}^s\, \Gamma_{si}^{\sigma} - \Gamma_{ik}^s\, \Gamma_{sj}^{\sigma})\, g_{\sigma l} = h_{jk}\, h_{il} - h_{ik}\, h_{jl}$$

$$\Rightarrow$$

$$(**) \qquad \mathcal{K} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{h_{11}\, h_{22} - (h_{12})^2}{g_{11}\, g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{R_{1221}}{\det g}.$$

Теорема 9.2. ***Теорема на Боне.*** *Дадени са шест функции E, F, G; L, M, N, дефинирани в околност $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, като E, F, $G \in \mathcal{C}^2$; L, M, $N \in \mathcal{C}^1$. За тези функции предполагаме, че удовлетворяват*

- *неравенствата $E > 0,\ EG - F^2 > 0$;*
- *уравненията на Петерсон - Майнарди - Кодаци $(*)$ и на Гаус $(**)$.*

Тогава за всяка точка $(u,v) \in \mathcal{U}$ съществуват околност $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ на (u,v) и дифеоморфизъм $x : \mathcal{V} \to x(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^3$ такива, че гладката повърхнина $S = x(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^3$, $S \in \mathcal{C}^3$ е определена с точност до еднаквост и за нея функциите E, F, G; L, M, N са коефициентите на първата, съответно втората основна форма.

Задача 9.3. *Да се изчислят символите на Кристофел спрямо декартова координатна система в отворено подмножество на равнината.*

Задача 9.4. *Да се изчислят символите на Кристофел за ротационната повърхнина*

$$S: \ x(u,v) = x(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \ f(v) \neq 0$$

и в частност за

a) катеноида: $f(v) = a\cosh v, \ g(v) = av, \ a = const$;

b) сферата: $f(v) = r\ \cos v, \ g(v) = r\ \sin v, \ r = const$.

10 Диференцируема функция върху повърхнина. Диференцируемо изображение между гладки повърхнини

Теорема 10.1. *Нека P е точка от гладката повърхнина S и*

$$X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to S, \quad Y : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \to S$$

са две параметризации на S, така че $P \in X(\mathcal{U}) \cap Y(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$.

Тогава смяната $h := X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(\mathcal{W}) \to X^{-1}(\mathcal{W})$ на "координатните системи" е ***дифеоморфизъм****, т.е. е диференцируема и има диференцируемо обратно изображение h^{-1}.*

Дефиниция 10.2. Нека $f : \mathcal{V} \subset S \to \mathbb{R}$ е дефинирана върху отвореното подмножество $\mathcal{V}$ на гладката повърхнина S. Функцията f се нарича **диференцируема** в точката $P \in \mathcal{V}$, ако за една параметризация $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, за която $P \in X(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$, композицията $f \circ X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е диференцируема в $X^{-1}(P)$.

f е диференцируема върху $\mathcal{V}$, ако е диференцируема във всички точки на $\mathcal{V}$.

От теорема 10.1 следва независимостта на тази дефиниция от параметризацията на повърхнината.

Дефиниция 10.3. Едно непрекъснато изображение $\phi : \mathcal{V}_1 \subset S_1 \to S_2$ на едно отворено подмножество $\mathcal{V}_1$ на гладката повърхнина S_1 в гладката повърхнина S_2 е диференцируемо в точка $P \in \mathcal{V}_1$, ако за параметризациите

$$X_1 : \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1, \quad X_2 : \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

с $P \in X_1(\mathcal{U}_1)$ и $\phi(X_1(\mathcal{U}_1)) \subset X_2(\mathcal{U}_2)$ изображението $\psi := X_2^{-1} \circ \phi \circ X_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ е диференцируемо в $Q = X_1^{-1}(P)$.

ϕ е **дифеоморфизъм** между S_1 и S_2, ако притежава диференцируемо обратно изображение.

Задача 10.4. *Да се докаже, че изображението*

$$\phi:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \phi(x_1,x_2,x_3) := (ax_1, bx_2, cx_3),\ a = const \neq 0,\ b = const \neq 0,\ c = const \neq 0$$

от сферата

$$S_1 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

в елипсоида

$$S_2 := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1\right\}$$

е дифеоморфизъм.

Задача 10.5. *Нека $S \subset \mathbb{R}^3$ е гладка повърхнина и $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ е онова изображение, което съпоставя на всяка точка $P \in S$ нейната ортогонална проекция върху $\mathbb{R}^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_3 = 0\}$. Диференцируемо ли е изображението π?*

Задача 10.6. *Да се докаже, че параболоидът $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ е дифеоморфен на равнина.*

Задача 10.7. *Нека са дадени повърхнините $S_1 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ и $S_2 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$. Да означим с $N(0,0,1)$ и $S(0,0,-1)$ съответно северния и южния полюс на сферата S_1. Дефинираме изображението*

$$f:\ S_1 \setminus \{N\} \cup \{S\} \to S_2$$

по следния начин:

През всяка точка $P \in S_1 \setminus \{N\} \cup \{S\}$ прекарваме равнината, перпендикулярна на оста Ox_3. Пресечната точка на тази равнина с оста означаваме с Q. Нека q е лъчът с начало точката Q, който съдържа точката P. Нека $f(P) = q \cap S_2$.

Да се докаже, че изображението f е диференцируемо.

11 Диференциал на изображение между гладки повърхнини

Нека S_1 и S_2 са две гладки повърхнини и $\phi : \mathcal{V} \subset S_1 \to S_2$ е диференцируемо изображение на отворено подмножество $\mathcal{V}$ от S_1 в S_2. Ако $P \in \mathcal{V}$, то всеки допирателен вектор $w \in T_P S_1$ към повърхнината S_1 е допирателен и към диференцируема крива $c = c(q) \subset \mathcal{V},\ q \in \mathcal{I},\ c(0) = P$ от повърхнината S_1. За кривата $\overline{c} = \phi \circ c$ е в сила $\overline{c}(0) = \phi(P)$ и векторът $\overline{c}'(0)$ е допирателен вектор към S_2, т.е. е от допирателната равнина $T_{\phi(P)}S_2$.

Теорема 11.1. *Ако $w = c'(0)$, то векторът $\overline{c}'(0)$ не зависи от избора на кривата $c(q)$.*

Изображението $d\,\phi_P : T_P S_1 \to T_{\phi(P)} S_2,\quad d\,\phi_P(w) = \overline{c}'(0)$ е линейно.

Линейното изображение $d\,\phi_P$ се нарича **диференциал** на изображението ϕ в точката $P \in S_1$.

Диференциал на (диференцируема) функция $f : \mathcal{U} \subset S \to \mathbb{R}$ в точка $P \in \mathcal{U}$ е линейното изображение $d\,f_P : T_P S \to \mathbb{R}$.

Задача 11.2. *Нека функцията* $f : S \to \mathbb{R}$ *е дефинирана чрез равенството* $f(P) = |P - P_0|^2$, *където* $P \in S$, *а* P_0 *е фиксирана точка от* $\mathbb{R}^3$. *Да се докаже, че* $d\,f_P(w) = 2w(P - P_0)$ *за произволен вектор* $w \in T_P S$.

Задача 11.3. *Нека* $v \in \mathbb{R}^3$ *е единичен вектор, а* $h : S \to \mathbb{R}, \quad h(P) = P\,v,\ P \in S$ *е диференцируема функция върху повърхнината* S. *Нека* $w \in T_P S$ *е произволен вектор, допирателен към* S. *Да се докаже, че* $d\,h_P(w) = w\,v$.

Задача 11.4. *Под* ***критична точка*** *на една диференцируема функция* $f : S \to \mathbb{R}$, *дефинирана върху гладка повърхнина* S, *се разбира точка* $P \in S$, *за която* $d\,f_P = 0$.

Да се намерят критичните точки на функциите от задачи 11.2 и 11.3.

Задача 11.5. *Нека* $\phi : S_1 \to S_2$ *и* $\psi : S_2 \to S_3$ *са диференцируеми изображения и нека* $P \in S_1$. *Да се докаже, че*

$$d\,(\psi \circ \phi)_P = d\,\psi_{\phi(P)} \circ d\,\phi_P.$$

12 Ориентируемост на повърхнина

Нека $\mathcal{U} \ni P,\ P \in S :\ x = x(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}$ и $\overline{\mathcal{U}} \ni \overline{P},\ \overline{P} \in S :\ \overline{x} = \overline{x}(\overline{u},\overline{v}),\ (\overline{u},\overline{v}) \in \overline{\mathcal{D}}$. Нека освен това $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset \wedge P \in \overline{\mathcal{U}} \Rightarrow u = u(\overline{u},\overline{v}),\ v = v(\overline{u},\overline{v})$.

Базите $\{x_u, x_v\}$ и $\{\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{x}_{\overline{v}}\}$ определят точно тогава една и съща ориентация на допирателната равнина на гладката повърхнина S в точка P от повърхнината, когато Якобианът $\dfrac{D(u,v)}{D(\overline{u},\overline{v})} > 0$.

Всяка повърхнина, която е графика на диференцируема функция, е ориентируема.

Гладка повърхнина, която може да се покрие с една координатна околност, е ориентируема.

Гладка повърхнина, която може да се покрие с две координатни околности, чието сечение е едносвързано множество, е ориентируема.

Теорема 12.1. *Една гладка повърхнина е ориентируема точно тогава, когато притежава диференцируем единичен нормален вектор във всяка своя точка.*

Задача 12.2. *Като се използват параметризациите*

$$M_1 : \left| \begin{array}{l} x_1(u,v) = \left(2 - v\,\sin\dfrac{u}{2}\right)\sin u, \\ x_2(u,v) = \left(2 - v\,\sin\dfrac{u}{2}\right)\cos u, \\ x_3(u,v) = v\,\cos\dfrac{u}{2},\ u \in (0, 2\pi),\ v \in (-1, 1); \end{array} \right.$$

$$M_2 : \left| \begin{array}{l} \overline{x}_1(\overline{u},\overline{v}) = \left(2 - \overline{v}\,\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\overline{u}}{2}\right)\right)\cos\overline{u}, \\ \overline{x}_2(\overline{u},\overline{v}) = -\left(2 - \overline{v}\,\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\overline{u}}{2}\right)\right)\sin\overline{u}, \\ \overline{x}_3(\overline{u},\overline{v}) = \overline{v}\,\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\overline{u}}{2}\right),\ \overline{u} \in (0, 2\pi),\ \overline{v} \in (-1, 1) \end{array} \right.$$

да се докаже, че Мъобиусовият лист е неориентируема повърхнина.

13 Паралелно пренасяне по линия върху повърхнина

Под **векторно поле** върху отворено множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ се разбира изображение, което съпоставя на всяка точка $q \in \mathcal{U}$ вектор $w(q) \in \mathbb{R}^2$. Векторното поле $w(q)$ е диференцируемо, ако $q = (u^1, u^2)$, $w(q) = (\lambda(u^1, u^2), \mu(u^1, u^2))$ и $\lambda(u^1, u^2)$, $\mu(u^1, u^2)$ са диференцируеми функции в $\mathcal{U}$.

Теорема 13.1. *Нека w е векторно поле върху отворено множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. При фиксирана точка $q \in \mathcal{U}$ съществува траектория $\alpha : \mathcal{I} \to \mathcal{U}$ на w (т.е. $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$, $t \in \mathcal{I}$) с $\alpha(0) = q$. Тази траектория е еднозначно определена в следния смисъл:*

Всяка друга траектория $\beta : \mathcal{J} \to \mathcal{U}$ с $\beta(0) = q$ съвпада с α в сечението $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

Правилната крива $c(t) \in \mathcal{U}$, $t \in \mathcal{I}$ се нарича **интегрална линия** на векторното поле $w(q)$, $q \in \mathcal{U}$, дефинирано върху $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, ако $w(q)$ е допирателен към $c(t)$ за всяка точка $q \in c(t) \subset \mathcal{U}$.

Под **векторно поле** w върху отворено множество $\mathcal{U} \subset S$ на гладката повърхнина S се разбира изображение, което съпоставя на всяка точка $P \in \mathcal{U}$ вектор $w(P) \in T_P S$.

Векторното поле w е диференцируемо за $P \in \mathcal{U}$, ако за параметризация $\mathcal{U} : \ x = x(u^1, u^2)$ около точката P функциите $\lambda(u^1, u^2)$, $\mu(u^1, u^2)$, зададени чрез $w(P) = \lambda(u^1, u^2)x_1 + \mu(u^1, u^2))x_2$, са диференцируеми функции в $P \in \mathcal{U}$.

13.1 Производна на функция по направление

$$S : \ x = x(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathcal{D} \ \wedge \ c \subset S : \ u^1 = u^1(q), \ u^2 = u^2(q), \ q \in \mathcal{I}$$

$$f(u^1, u^2) : S \ \to \ \mathbb{R}, \ f \in \mathcal{C}^1, \ (u^1, u^2) \in \mathcal{D} \ \Rightarrow \ f_{|c} = f(q) = f(u^1(q), u^2(q)), \ q \in \mathcal{I}$$

$$c(q) := x(q), \ \dot{c}\,(q) := \frac{\partial u^i}{\partial q}\, x_i \ \Rightarrow \ \frac{d\,f}{d\,q} = \frac{\partial f}{\partial u^i}\,\frac{\partial u^i}{\partial q}, \ q \in \mathcal{I} \ \Rightarrow \ \nabla_{\dot{c}}\, f := \frac{\partial f}{\partial u^i}\,\frac{\partial u^i}{\partial q}$$

$$X = \lambda^i\, x_i \ \in \ T_x S \ \Rightarrow \ \nabla_X\, f := \frac{\partial f}{\partial u^i}\,\lambda^i = X(f)$$

13.2 Производна на векторно поле по гладка линия

$$S : \ x = x(u^1, u^2), \quad Y := \mu^i\, x_i \ \in \ TS, \quad \mu^i = \mu^i(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \ \in \ \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$c \subset S : \ u^1 = u^1(t), \ u^2 = u^2(t), \ t \in \mathcal{I} \subset \mathcal{D} \ \Rightarrow \ Y_{|c} = Y(u^1(t), u^2(t)) = \mu^s(t)\, x_s, \ t \in \mathcal{I}$$

$$\frac{d\,Y}{d\,t} = \frac{d\,\mu^s}{d\,t}\, x_s + x_{si}\frac{d\,u^i}{d\,t}\,\mu^s = \left(\frac{d\,\mu^s}{d\,t} + \Gamma^s_{ij}\,\frac{d\,u^i}{d\,t}\,\mu^j\right)\, x_s + h_{ij}\,\frac{d\,u^i}{d\,t}\,\mu^j\, l$$

$$\nabla_{\dot{c}}\, Y := \frac{\mathcal{D}\,Y}{d\,t} := \left(\frac{d\,\mu^s}{d\,t} + \Gamma^s_{ij}\,\frac{d\,u^i}{d\,t}\,\mu^j\right)\, x_s = \left(\frac{d\,\mu^s}{d\,u^i} + \Gamma^s_{ij}\,\mu^j\right)\,\frac{d\,u^i}{d\,t}\, x_s \ \in \ T_c S$$

$\nabla_{\dot{c}}\, Y$ е **ковариантната производна** на векторното поле Y по линията c.

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d\,Y}{d\,t} = \nabla_{\dot{c}}\, Y + h_{ij}\,\frac{d\,u^i}{d\,t}\,\mu^j\, l = \frac{\mathcal{D}\,Y}{d\,t} + h_{ij}\,\frac{d\,u^i}{d\,t}\,\mu^j\, l$$

$$Y := \mu^s\, x_s \in TS,\ X := \lambda^k\, x_k \in T_xS \ \Rightarrow$$
$$\nabla_X Y := \left(\frac{d\,\mu^s}{d\,u^i}\,\lambda^i + \Gamma^s_{ij}\,\lambda^i\,\mu^j\right)\, x_s \ \in T_xS$$

$\nabla_X Y$ е **ковариантната производна** на векторното поле Y по вектора X.

Смяна на променливите

$$u^1 := u^1(\overline{u}^1, \overline{u}^2),\ u^2 := u^2(\overline{u}^1, \overline{u}^2),\ (\overline{u}^1, \overline{u}^2) \in \overline{\mathcal{D}} \ \Rightarrow\ S:\ \overline{x} = x(u^1(\overline{u}^1, \overline{u}^2), u^2(\overline{u}^1, \overline{u}^2))$$
$$\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\,\beta} = \left(\frac{\partial^2\, u^k}{\partial\overline{u}^\alpha \partial\overline{u}^\beta} + \Gamma^k_{ij}\,\frac{\partial u^i}{\partial\overline{u}^\alpha}\,\frac{\partial u^j}{\partial\overline{u}^\beta}\right)\,\frac{\partial\overline{u}^\gamma}{\partial u^k}$$

Свойства на ковариантното диференциране:

(1) $\nabla_{\lambda X} f = \lambda\,\nabla_X f$;

(2) $\nabla_{X+Y} f = \nabla_X f + \nabla_Y f$;

(3) $\nabla_X (fg) = (\nabla_X f)g + f(\nabla_X g)$;

(4) $\nabla_{\lambda X} Y = \lambda\,\nabla_X Y$;

(5) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;

(6) $\nabla_X (fY) = (\nabla_X f)Y + f(\nabla_X Y)$;

(7) $\nabla_X (YZ) = (\nabla_X Y)Z + Y(\nabla_X Z)$.

13.3 Паралелно пренасяне по гладка линия върху повърхнина

$$S:\ x = x(u^1, u^2), \quad Y := \mu^i\, x_i \ \in\ T_xS, \quad \mu^i = \mu^i(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2)\ \in\ \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$c \subset S:\ u^1 = u^1(t),\ u^2 = u^2(t),\ t \in \mathcal{I} \subset \mathcal{D}$$

Векторното поле Y се нарича **паралелно** по линията $c(t)$, ако

$$\nabla_{\dot{c}}\, Y = \overrightarrow{0} \quad \left(\frac{d\,\mu^s}{d\,t} + \Gamma^s_{ij}\,\frac{d\,u^i}{d\,t}\,\mu^j = 0,\ s = 1, 2\right),$$

т.е. $\dfrac{d\,Y}{d\,t}$ е перпендикулярен на тангенциалната равнина към повърхнината в точките на линията $c(t)$.

Теорема 13.2. *Нека векторните полета X и Y са паралелни по линията*

$$c:\ \mathcal{I}\ \to\ S \quad (c = c(t) \subset S,\ t \in \mathcal{I}).$$

Тогава е в сила:

$$X(t)Y(t) = const, \quad |X(t)| = const, \quad |Y(t)| = const, \quad \angle(X(t), Y(t)) = const.$$

Нека $c: \mathcal{I} \to S$ е крива и нека $X_0 \in T_{c(t_0)}S,\ t_0 \in \mathcal{I}$. Нека X е векторното поле, паралелно по линията c, с начално условие $X(t_0) = X_0$. Векторът $X(t_1)$, $t_1 \in \mathcal{I}$, е **паралелно пренесеният** на вектора X_0 по линията c в точката t_1.

Нека $P, Q \in S$ и $c: \mathcal{I} \to S$ е линия върху повърхнината, за която $c(t_0) = P,\ t_0 \in \mathcal{I}$, и $c(t_1) = Q,\ t_1 \in \mathcal{I}$. Нека $\phi: T_PS \to T_QS$ е изображението, което на всеки вектор $X(t_0) \in T_PS$ съпоставя неговия паралелно пренесен $X(t_1) \in T_QS$ по линията c в точката Q. От Теорема 13.2 следва, че изображението ϕ е изоморфизъм между евклидовите векторни пространства T_PS и T_QS.

Този изоморфизъм се нарича **паралелно пренасяне** на T_PS в T_QS по линията c.

13.4 Геодезични линии на повърхнина

Дефиниция 13.3. Нека w е диференцируемо единично векторно поле по гладката крива $c: \mathcal{I} \to S$ върху ориентируема повърхнина S. Понеже $w(t),\ t \in \mathcal{I}$ е единичен вектор, то $\left(\dfrac{d\,w(t)}{d\,t}\right)(t)$ е перпендикулярен на $w(t)$ и е в сила

$$\frac{\mathcal{D}\,w}{d\,t} = \nabla_{c'} w = \lambda\,(l \times w(t)).$$

Реалното число $\lambda = \lambda(t)$ се нарича **алгебрична мярка** на ковариантната производна на w в t.

В случая, когато $w(t) = c'(t)$, $\lambda(t)$ е **геодезичната кривина** $\gamma(t)$ на линията $c \subset S$ в точката $c(t) \in S$.

Знакът на $\lambda(t) = l\,w\,\dfrac{d\,w}{d\,t} = l\,w\,\nabla_{c'} w$ (на геодезичната кривина $\gamma(t)$) зависи от ориентацията на S .

$$c: u^1 = u^1(s),\ u^2 = u^2(s),\ (u^1)'^2 + (u^2)'^2 = 1,\ s \in \mathcal{I};\ c \in \mathcal{C}^2; \quad c \subset S$$

Линията c се нарича **геодезична** за повърхнината, ако $\nabla_{c'} c' = 0$, т.е. допирателното векторно поле $c' = t$ е паралелно по c.

$$\nabla_{c'} c' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\,u^k}{d\,s^2} + \Gamma^k_{ij}\,\frac{d\,u^i}{d\,s}\,\frac{d\,u^j}{d\,s} = 0,\ k = 1, 2 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(s) = 0,\ s \in \mathcal{I}$$

Теорема 13.4. *Нека x е точка от повърхнината S, а X е единичен допирателен вектор в точката x. Съществува единствена геодезична линия върху S, която минава през x и се допира до вектора X.*

Теорема 13.5. *Една двукратно гладка линия c върху повърхнината S е геодезична точно когато във всяка нейна точка x е изпълнено някое от условията:*

(a) $x' \times x'' = \overrightarrow{0}$, т.е. x е точка на изправяне на c (т.е. c е права линия);

(b) $x' \times x'' \neq \overrightarrow{0}$ и оскулачната равнина на c в x е перпендикулярна на тангенциалната равнина на S в x.

$$c = c(s) \subset S,\ c'^2(s) = t^2 = 1 \ \Rightarrow\ t' = \gamma\,\mathbf{p} + \nu\, l \ \Rightarrow$$

$$\varkappa^2{}_{|c} = \gamma^2{}_{|c} + \nu^2{}_{|c}, \quad \nu_{|c} = \varkappa_{|c}\cos\theta, \quad \gamma_{|c} = \varkappa_{|c}\sin\theta, \quad \theta := \angle(n_{|c}, l)$$

За координатните линии $u^2 = const,\ u^1 = const$ имаме съответно:

$$\gamma_1 = \frac{-E_v}{2E\sqrt{G}}, \quad \gamma_2 = \frac{G_v}{2G\sqrt{E}}.$$

Задача 13.6. *Да се намерят геодезичните линии в равнината*

$$S:\ x^1 = u^1,\ x^2 = u^2,\ x^3 = 0.$$

Задача 13.7. *Да се намерят геодезичните линии върху ротационната повърхнина*

$$S:\ x(u,v) = x(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),\ f(v) \neq 0.$$

Задача 13.8. *Нека $c(t) \subset S,\ t \in \mathcal{I}$. Да се докаже, че:*

(a) ако кривата c е линия на кривина и геодезична, то тя е равнинна;

(b) ако една крива c е геодезична, равнинна, но не е права линия, то тя е линия на кривина;

(c) една линия c е геодезична и асимптотична точно тогава, когато е част от права линия върху повърхнината.

Задача 13.9. *Нека е даден ротационният тор, получен при завъртането на окръжността $(x^1 - a)^2 + (x^3)^2 = r^2,\ x^2 = 0,\ a > r > 0$, около оста Ox^3. Да се провери кой от паралелите, минаващи през точките $(a + r, 0)$, $(a - r, 0)$ и (a, r), е*

(a) геодезична линия за тора,

(b) асимптотична линия за тора,

(c) линия на кривина за тора.

Задача 13.10. *Да се намери геодезичната кривина на линията*

$$c:\ x = x(u),\ x'^2 = 1,\ u \in \mathcal{I}$$

върху праволинейната повърхнина, образувана от

(a) бинормалите на c,

(b) главните нормали на c.

Задача 13.11. *Да се намерят геодезичните линии на повърхнината*

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_3)^2.$$

Задача 13.12. *Да се докаже, че уравненията на геодезичните линии на повърхнината S с първа основна форма*

$$I(u', v') = u'^2 + G(u, v)\, v'^2$$

могат да се запишат във вида $\phi_v = -\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$, *където* ϕ *е ъгълът, под който геодезичните линии пресичат линиите* $v = const$ *върху повърхнината* S.

Задача 13.13. *Да се намерят ОДУ на геодезичните линии и Гаусовата кривина на повърхнината с метрика*

$$I(u', v') = u'^2 + e^{2u} v'^2.$$

13.5 Паралелни геодезични координати върху гладка повърхнина

$$S:\ x = x(\overline{u}^1, \overline{u}^2),\ (\overline{u}^1, \overline{u}^2) \in \overline{\mathcal{D}}, \quad c:\ \overline{u}^1 = \overline{u}^1(q),\ \overline{u}^2 = \overline{u}^2(q),\ |q| < a,\ a = const$$

$$c \subset S \ \Rightarrow\ c:\ x = x(\overline{u}^1(q), \overline{u}^2(q)),\ |q| < a,\ (\overline{u}^1(0), \overline{u}^2(0)) \in \overline{\mathcal{D}}_0 \subset \overline{\mathcal{D}}$$

$$p(q)\ \perp\ x'(q),\ |p(q)| = 1,\ |q| < a\ \Rightarrow\ \exists\, 1\,\text{geodesic}\,\gamma_q:\ \gamma_q \ni x(q)\ \wedge\ {\gamma_q}' = p(q)\ \Rightarrow$$

$$\gamma_q \subset S\ \wedge\ \gamma_q:\ \overline{u}^1 = \overline{u}^1(s, q),\ \overline{u}^2 = \overline{u}^2(s, q),\ s \in \mathcal{I}_q,\ \frac{d^2\overline{u}^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\,\frac{d\overline{u}^i}{ds}\,\frac{d\overline{u}^j}{ds} = 0$$

$$\frac{D(\overline{u}^1, \overline{u}^2)}{D(s, q)}(0, s) = \begin{vmatrix} \partial\,\overline{u}^1/\partial\, s & \partial\,\overline{u}^1/\partial\, q \\ \partial\,\overline{u}^2/\partial\, s & \partial\,\overline{u}^2/\partial\, q \end{vmatrix}(0, s) = |p \times x'| = |x'| > 0$$

$$\Rightarrow$$

$$S:\ \exists\, u^1 = s,\ u^2 = q,\ (u^1, u^2) \in \mathcal{D}_0|\ u^2 = const\ \rightarrow\ \text{geodesics}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$I((u^1)', (u^2)') = (u^1)'^2 + G(u^1, u^2)(u^2)'^2$$

Линията $c:\ u^1 = 0$ се нарича **базисна** за повърхнината, отнесена спрямо **паралелни геодезични координати**.

Ако базисната линия c е също геодезична и е отнесена спрямо естествения си параметър, то (u^1, u^2) са **координати на Ферми** за повърхнината.

Теорема 13.14. *Всяка двойка линии* $u^1 = c^1 = const$, $u^1 = c^2 = const$ *от ортогоналните траектории на семейството геодезични линии* $u^2 = const$ *отсича дъги с равни дължини от геодезичните линии.*

Теорема 13.15. *Спрямо паралелни геодезични координати Гаусовата кривина на повърхнината е*

$$\mathcal{K} = -\frac{\partial^2_{11}\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Задача 13.16. *Повърхнина $S:\ x = x(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}$, за която съществува локална координатна система (U,V), при която коефициентите на първата основна форма имат вида*

$$E = G = U + V,\ F = 0,\ U = U(u),\ V = V(v),\ (u,v) \in \mathcal{D},$$

се нарича ***повърхнина на Лиувил****.*

Да се докаже, че

(a) геодезичните линии на повърхнината на Лиувил могат да се получат във вида
$$\int \frac{du}{\sqrt{U-c}} \pm \int \frac{dv}{\sqrt{V+c}} = c_0, \quad c, c_0 = const;$$

(b) ако $\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, е ъгълът, който геодезична линия сключва с линия $V = const$, то
$$U\ \sin^2\theta - V\ \cos^2\theta = const.$$

13.5.1 Минимално свойство на геодезичните линии

Теорема 13.17. *Нека повърхнината S е отнесена спрямо паралелни геодезични координати и геодезичната дъга γ съединява точките A и B. Ако c е произволна гладка дъга, съединяваща A и B, то дължината на γ не надминава дължината на c.*

14 Повърхнини с постоянна Гаусова кривина

I. Единствените повърхнини с постоянна Гаусова кривина $\mathcal{K} = 0$ са праволинейните развиваеми повърхнини.

$$\mathcal{K} \neq 0\ \Rightarrow$$

Повърхнината S е отнесена спрямо паралелни геодезични координати и базисната крива е също геодезична, отнесена спрямо естествения си параметър. Тогава

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = const \neq 0.$$

$$\mathcal{K} > 0\ \Rightarrow\ \sqrt{G} = \cos(\sqrt{\mathcal{K}}u); \quad I(u',v') = u'^2 + \cos^2(\sqrt{\mathcal{K}u})v'^2$$

$$\mathcal{K} < 0\ \Rightarrow\ \sqrt{G} = \cosh(\sqrt{-\mathcal{K}}u); \quad I(u',v') = u'^2 + \cosh^2(\sqrt{\mathcal{K}u})v'^2$$

Задача 14.1. *Да се намерят ротационните повърхнини с постоянна Гаусова кривина.*

15 Изометрия на повърхнина върху повърхнина

$$\phi:\ S\ \to \overline{S}, \quad \phi:\ P \in S\ \to \phi(P) \in \overline{S}; \quad d\phi_P:\ T_PS\ \to T_{\phi(P)}\overline{S},$$

$$d\phi_P:\ w = \lambda(P)x_u + \mu(P)x_v \in T_PS\ \to\ \overline{w} = \overline{\lambda}(\phi(P))\overline{x}_{\overline{u}} + \overline{\mu}(\phi(P))\overline{x}_{\overline{v}} \in T_{\phi(P)}\overline{S}$$

$$E\,\lambda^2 + 2F\,\lambda\,\mu + G\,\mu^2 = \overline{E}\,\overline{\lambda}^2 + 2\overline{F}\,\overline{\lambda}\,\overline{\mu} + \overline{G}\,\overline{\mu}^2, \quad \gamma = \overline{\gamma}, \quad \mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}}$$

Задача 15.1. *Да се докаже, че ако върху една повърхнина има мрежа геодезични линии, сключващи постоянен ъгъл помежду си, то тя е изометрична на равнина.*

Задача 15.2. *Да се намери ротационна повърхнина $\overline{S}$, изометрична на ротационната повърхнина*

$$S:\ x_1 = u\cos v,\ x_2 = u\sin v,\ x_3 = f(u),$$

така че паралелите и меридианите на S и $\overline{S}$ да са съответни при изометрията.

Задача 15.3. *Нека $c:\ x = x(q)$ и $\overline{c}:\ \overline{x} = \overline{x}(q)$ са криви без точки на изправяне, като $\varkappa(q) = \overline{\varkappa}(q)$ и $s(q) = \overline{s}(q)$ за всяко $q \in \mathcal{I}$. Нека S е праволинейната повърхнина от тангентите на c, а $\overline{S}$ тази от тангентите на $\overline{c}$. Да се докаже, че S и $\overline{S}$ са изометрични.*

Задача 15.4. *Да се докаже, че конусът*

$$x_3 = k\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \neq (0,0)$$

е локално изометричен на равнина.

Задача 15.5. *Нека изображението $\phi:\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ е дефинирано чрез*

$$\phi(u,v) = (u\sin\alpha\cos v, u\sin\alpha\sin v, u\cos\alpha),\ (u,v) \in U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 |\ u > 0\},\ \alpha = const.$$

(a) *Да се докаже, че ϕ е локален дифеоморфизъм на U върху конус S с връх в началото на координатната система и ъгъл при върха 2α.*

(b) *Изображението ϕ локална изометрия ли е?*

Задача 15.6. *Да се докаже, че катеноидът*

$$S:\ x_1 = u\cos v,\ x_2 = u\sin v,\ x_3 = a\ \ln(u + \varepsilon\sqrt{u^2 - a^2}),\ \varepsilon = \pm 1,\ u + \varepsilon\sqrt{u^2 - a^2} > 0$$

и правият хеликоид

$$\overline{S}:\ \overline{x}_1 = \overline{u}\cos\overline{v},\ \overline{x}_2 = \overline{u}\sin\overline{v},\ \overline{x}_3 = a\overline{v},\ a = const$$

са изометрични.

16 Конформно изображение на повърхнина върху повърхнина

$$\phi:\ S \to \overline{S}, \quad \phi:\ P \in S \to \phi(P) \in \overline{S}; \quad d\phi_P:\ T_PS \to T_{\phi(P)}\overline{S},$$

$$d\phi_P:\ w_1 = \lambda_1(P)x_u + \mu_1(P)x_v \in T_PS \to \overline{w}_1 = \overline{\lambda}_1(\phi(P))\overline{x}_{\overline{u}} + \overline{\mu}_1(\phi(P))\overline{x}_{\overline{v}} \in T_{\phi(P)}\overline{S}$$

$$w_2 = \lambda_2(P)x_u + \mu_2(P)x_v \in T_PS \to \overline{w}_2 = \overline{\lambda}_2(\phi(P))\overline{x}_{\overline{u}} + \overline{\mu}_2(\phi(P))\overline{x}_{\overline{v}} \in T_{\phi(P)}\overline{S}$$

$$\begin{aligned}\cos(w_1, w_2) &= \frac{E\,\lambda_1\,\lambda_2 + F\,(\lambda_1\,\mu_2 + \mu_1\,\lambda_2) + G\,\mu_1\,\mu_2}{\sqrt{I(\lambda_1,\mu_1)}\sqrt{I(\lambda_2,\mu_2)}} \\ &= \frac{\overline{E}\,\overline{\lambda}_1\,\overline{\lambda}_2 + \overline{F}\,(\overline{\lambda}_1\,\overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_1\,\overline{\lambda}_2) + \overline{G}\,\overline{\mu}_1\,\overline{\mu}_2}{\sqrt{\overline{I}(\overline{\lambda}_1,\overline{\mu}_1)}\sqrt{\overline{I}(\overline{\lambda}_2,\overline{\mu}_2)}} = \cos(\overline{w}_1\overline{w}_2)\end{aligned}$$

Задача 16.1. *Да се докаже, че изображението*

$$\phi:\ \overline{u} = \ln\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}),\ \overline{v} = v$$

индуцира конформно изображение на сферата

$$S:\ x_1 = a\ \cos u \cos v,\ x_2 = a\ \cos u \sin v,\ x_3 = a\ \sin u$$

върху равнината $\overline{S}$: $\overline{x}_1 = \overline{u},\ \overline{x}_2 = \overline{v},\ \overline{x}_3 = 0$ *(картографска или Меркаторова проекция).*

Задача 16.2.

Да се докаже, че изображението на хеликоида

$$S:\ x(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv),\ b = const$$

върху Гаусовата сфера посредством нормалите на S *е конформно.*

Задача 16.3. *Да се докаже, че стереографската проекция изобразява конформно сферата върху евклидовата равнина.*

Задача 16.4. *Да се докаже, че съществува конформно изображение на ротационния параболоид*

$$S:\ x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$$

върху област от равнината Ox_1x_2.

Задача 16.5. *Нека* S_1, S_2 *и* S_3 *са гладки повърхнини. Да се докаже, че*

(a) ако $\phi:\ S_1 \to S_2$ *е изометрия, то и обратното изображение* $\phi^{-1}:\ S_2 \to S_1$ *е изометрия;*

(b) ако $\phi:\ S_1 \to S_2$ *и* $\psi:\ S_2 \to S_3$ *са изометрии, то и* $\psi \circ \phi:\ S_1 \to S_3$ *е изометрия.*

Следователно, изометриите на една гладка повърхнина образуват по естествен начин група от преобразувания, наречена ***групата на изометриите*** *на повърхнината.*

Задача 16.6. *Нека* V *и* W *са две крайномерни векторни пространства с дефинирано в тях скаларно произведение* $\langle\ ,\ \rangle$. *Нека* $\phi:\ V \to W$ *е линейно изображение. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:*

(a) Съществува константа $\lambda \neq 0$, *така че*

$$\langle\phi(v_1), \phi(v_2)\rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2\rangle,\ \forall\ v_1,\ v_2 \in V.$$

(b) Съществува константа $\lambda > 0$, *така че*

$$|\phi(v)| = \lambda|v|,\ \forall\ v \in V.$$

(c) Съществува ортонормирана база $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *на* V, *така че* $\{\phi(v_1), \phi(v_2), ..., \phi(v_n)\}$ *е ортогонално семейство вектори в* W *и векторите* $\phi(v_j),\ j = 1, ..., n$, *имат една и съща (различна от 0) дължина.*

Ако е изпълнено някое от тези условия, то ϕ *се нарича* ***линейно конформно*** *изображение (****подобност****).*

17 Гладки многообразия, гладки функции и изображения. Допирателни вектори и допирателно пространство в точка на гладко многообразие. Диференциал на гладко изображение

Задача 17.1. *Нека S^2 е единичната сфера. Да се докаже, че S^2 е двумерно диференцируемо многообразие с атлас $\mathcal{U}$, чиито локални карти са (U_i, ϕ_i), $i = 1, ..., 6$, дефинирани по следния начин:*

$$U_1 = \{P \in S^2 |\ z > 0\}, \quad U_2 = \{P \in S^2 |\ z < 0\}, \quad U_3 = \{P \in S^2 |\ y > 0\},$$

$$U_4 = \{P \in S^2 |\ y < 0\}, \quad U_5 = \{P \in S^2 |\ x > 0\}, \quad U_6 = \{P \in S^2 |\ x < 0\},$$

а ϕ_i са съответно ортогоналните проекции на U_i върху координатната равнина, която няма общи точки с U_i.

Задача 17.2. *Като се използва* ***стереографската проекция*** *да се докаже, че сферата $S^2(O, R)$ е 2-мерно диференцируемо многообразие в $\mathbb{R}^3$.*

Задача 17.3. *Да се докаже, че многообразията*

$$M = \{(\mathbb{R},\, \phi :\, x \to x)\}, \quad N = \{(\mathbb{R},\, \psi :\, x \to x^3)\}$$

са дифеоморфни, но не съвпадат.

Класическото понятие за свободен вектор като "линеен елемент в направление"

$$X = a\, e_1 + b\, e_2 + c\, e_3 \ \in \mathbb{R}^3,\ a, b, c = const$$

се пренася за "оператор върху функция"

$$X = a\, \frac{\partial}{\partial\, x^1} + b\, \frac{\partial}{\partial\, x^2} + c\, \frac{\partial}{\partial\, x^3} \ \in (\mathbb{R}^3, \phi),$$

като: ако f е реално-значна $\mathcal{C}^\infty$-функция върху $\mathbb{R}^3$, то Xf е производната на f по направление X , т.е.

$$\nabla_X f = Xf = a\, \frac{\partial\, f}{\partial\, x^1} + b\, \frac{\partial\, f}{\partial\, x^2} + c\, \frac{\partial\, f}{\partial\, x^3}$$

$$f \in \mathcal{F}M,\ f :\ M^m \to N^n,\ P \in M,\ f(P) \in N,\ X \in T_P M,\ g \in \mathcal{F}N\ \Rightarrow$$

$$f_{*P} : T_P M \to T_{f(P)} N,\ f_{*P} X \in T_{f(P)} N\ \wedge\ (f_{*P} X)(g) := X(g \circ f)$$

$$M \supset (\mathcal{U}, \phi) : \mathcal{U} \ni P,\ \{x^i\} \in \phi(\mathcal{U})\ \wedge\ N \supset (\mathcal{V}, \psi) :\ \mathcal{V} \ni f(P),\ \{y^j\} \in \psi(\mathcal{V})$$

$$X = \left(\alpha^i \frac{\partial}{\partial\, x^i}\right)_P,\ \alpha^i = X(x^i),\ i = 1, 2, ..., m,\ Y = f_{*P} X = \left(\beta^j \frac{\partial}{\partial\, y^j}\right)_{f(P)},$$

$$\beta^j = (f_{*P} X)(y^j) = X(y^j \circ f) = \left(\alpha^i\, \frac{\partial (y^j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial\, x^i}\right)_{\phi(P)},\ j = 1, 2, ..., n$$

Задача 17.4. *Нека* $M = \{(\mathbb{R}^2,\ id_{\mathbb{R}^2})$ *е диференцируемо многообразие и изображението* $f : M \to M$ *е дефинирано чрез равенството* $f(x^1, x^2) = ((x^1)^2 - 2(x^2),\ 4(x^1)^3(x^2)^2)$. *Да се намери матрицата на изображението* f_* *в точката* $P(1, 2)$.

Задача 17.5. *Дадени са диференцируемите многообразия* $M = \{(\mathbb{R}^2, id_{\mathbb{R}^2})\}$ *и* $N = \{(\mathbb{R}^4, id_{\mathbb{R}^4})\}$, *изображението* $f : M \to N$, *като*

$$f(x^1, x^2) = (x^1 + \cos x^2 = y^1,\ (x^2)^2 = y^2,\ x^1\, x^2 = y^3,\ 3(x^1)^4(x^2) = y^4)$$

и векторното поле $X = x^1 \dfrac{\partial}{\partial\, x^2} \in \mathcal{X}M$. *Да се определи рангът на изображението* f *във всяка точка на* M *и да се намери* $f_{*(1,-1)}X_{(1,-1)}$.

18 Гладки векторни полета. Комутатор

$$[\,.\,,\,.\,] :\ \mathcal{X}M \times \mathcal{X}M \to \mathcal{X}M :$$

$$[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y], \quad [X, \alpha Y_1 + \beta Y_2] = \alpha[X, Y_1] + \beta[X, Y_2],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

$$[X, Y]_P := X_P\, Y - Y_P\, X, \quad [X, Y]_P\, f = X_P(Yf) - Y_P(Xf), \quad f \in \mathcal{F}M$$

$$X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X = \lambda^i\, X_i, \quad Y = \mu^i\, X_i \quad \Rightarrow$$

$$[X_i, X_j] = 0,\ i, j = 1, ...m, \quad [X, Y] = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\lambda^j \frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} - \mu^j \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$[X, f\, Y] = f\, [X, Y] + (Xf).Y, \quad [fX, Y] = f\, [X, Y] - (Yf).X,$$

$$[fX, gY] = f\, g\, [X, Y] + f\, (Xg).Y - g\, (Yf).X$$

Задача 18.1. *Нека* $(\mathcal{U}, \phi)$, $\mathcal{U} \subset M \wedge \{x^i\} \in \phi(\mathcal{U})$ *е карта върху гладкото многообразие* M *и нека* $X, Y \in \mathcal{X}M$.

Да се намери $[X, Y]$, *ако:*

(a) $\dim M = 2, \quad X = x^1 \dfrac{\partial}{\partial\, x^1} + x^2 \dfrac{\partial}{\partial\, x^2}, \quad Y = -x^2 \dfrac{\partial}{\partial\, x^1} + x^1 \dfrac{\partial}{\partial\, x^2};$

(b) $\dim M = 2, \quad X = x^1 \dfrac{\partial}{\partial\, x^1} + 2x^2 \dfrac{\partial}{\partial\, x^2}, \quad Y = 3 \dfrac{\partial}{\partial\, x^1} + x^1 \dfrac{\partial}{\partial\, x^2};$

(c) $\dim M = 3, \quad X = 2x^1 \dfrac{\partial}{\partial\, x^1} + x^2 \dfrac{\partial}{\partial\, x^2} + 2x^3 \dfrac{\partial}{\partial\, x^3},$

$Y = 2x^1\, x^2 \dfrac{\partial}{\partial\, x^1} + (x^2)^2 \dfrac{\partial}{\partial\, x^2} + 2\, x^2\, x^3 \dfrac{\partial}{\partial\, x^3}.$

19 Линейна свързаност. Кривина и торзия на линейна свързаност. Симетрични линейни свързаности.

Нека M е $\mathcal{C}^\infty$ диференцируемо многообразие и $\dim M = n$. **Свързаност**, или **ковариантно диференциране**, върху M е оператор ∇, който съпоставя на всяка двойка (X, Y) от $\mathcal{C}^\infty$ векторни полета в област $\mathcal{U}$ от M векторно поле $\nabla_X Y$ от $\mathcal{U}$, като: ако Z е $\mathcal{C}^\infty$ векторно поле в $\mathcal{U}$ и f е $\mathcal{C}^\infty$ реално-значна функция върху $\mathcal{U}$, то ∇ удовлетворява условията

(a) $\nabla_x(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(b) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_x Z + \nabla_Y Z$;

(c) $\nabla_{fX} Y = f\, \nabla_x Y$;

(d) $\nabla_X(fY) = (Xf)\, Y + f \nabla_x Y$.

Тези свойства показват, че векторът $(\nabla_X Y)_P,\ P \in \mathcal{U}$ зависи само от X_P и стойностите на Y по крива, допираща се до X_P.

$$\{e_i := \frac{\partial}{\partial\, x^i} \in \mathcal{XU}\} \ \Rightarrow\ \nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij}\, e_k \in \mathcal{XU},\ i, j, k = 1, ..., n.$$

$$X = \lambda^i\, e_i,\ Y = \mu^j\, e_j \ \Rightarrow\ \nabla_X Y = \lambda^i\, (e_i\, \mu^j)\, e_j + \lambda^i\, \mu^j\, (\nabla_{e_i} e_j)$$

Функциите Γ^k_{ij} се наричат **компоненти** на линейната свързаност ∇ в областта $\mathcal{U}$.

Тензор на торзията на свързаността ∇ е $2f$-линейното изображение

$$T:\ \mathcal{XU} \times \mathcal{XU}\ \to\ \mathcal{XU},$$

дефинирано по следния начин

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathcal{XU}.$$

Лесно се съобразява, че

(a) $T(X, Y) = -T(Y, X)$;

(b) $T(X + Y, Z) = T(X, Z) + T(Y, Z)$;

(c) $T(fX, Y) = T(X, fY) = f\, T(X, Y),\ f \in \mathcal{FU},\ X, Y, Z \in \mathcal{XU}$;

(d) $T(e_i, e_j) = T^k_{ij}\, e_k, \quad T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$.

Свързаността ∇ се нарича **симетрична** (или свързаност без торзия), ако $T \equiv 0$.

Тензор на кривината R на линейната свързаност ∇ е $3f$-линейното изображение

$$R:\ \mathcal{XU} \times \mathcal{XU} \times \mathcal{XU}\ \to\ \mathcal{XU},$$

дефинирано по следния начин

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathcal{XU}.$$

R притежава свойствата

(a) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \quad X,Y,Z \in \mathcal{XU}$;

(b) $R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z, \quad f \in \mathcal{FU}$;

(c) $R(e_i,e_j)e_k = R^l_{ijk}\, e_l, \quad R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{is}\,\Gamma^s_{jk} - \Gamma^l_{js}\,\Gamma^s_{ik}$.

Нека M и M' са $\mathcal{C}^\infty$ диференцируеми многообразия с линейни свързаности ∇ и ∇' съответно. $\mathcal{C}^\infty$ изображението $f:\ M \to M'$ се нарича **запазващо свързаността**, ако за произволни векторни полета X, Y върху M

$$f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*X}(f_*Y).$$

Задача 19.1. *Нека са дадени векторните полета $X = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ и*

$$Y = (x^1(x^2)^2 + 4x^3 = y^1, (x^2)^2 - x^1 = y^2, x^1 + (x^3)^3 = y^3).$$

Да се намери $\nabla_X Y$.

Задача 19.2. *Нека f е $\mathcal{C}^\infty$ изображение на диференцируемото многообразие M върху диференцируемото многообразие M', запазващо свързаността. Да се докаже, че*

$$f_*T(X,Y) = T'(f_*X, f_*Y), \quad f_*R(X,Y)Z = R'(f_*X, f_*Y)f_*Z, \quad X,Y,Z \in \mathcal{X}M.$$

20 Диференциална Геометрия - конспект

1. Гладки линии. Естествен параметър.
2. Правилни линии. Придружаващ триедър.
3. Формули на Френе за правилна линия.
4. Скаларни и векторни инварианти на линия. Естествени уравнения на правилна линия.
5. Равнинни линии.
6. Гладки повърхнини. Тангенциална равнина. Инвариантност.
7. Първа основна форма на повърхнина.
8. Изображение на Вайнгартен. Инвариантност. Втора основна форма на повърхнина. Гаусово изображение на повърхнина.
9. Гаусова и средна кривина на повърхнина. Инвариантност.
10. Нормална кривина на гладка линия върху повърхнина. Теорема на Meusnier.
11. Асимптотични линии. Минимални повърхнини.
12. Геодезична торзия на гладка линия върху повърхнина. Главни линии на повърхнина. Омбилични точки върху повърхнина.

13. Формула на Ойлер за нормалните кривини. Оскулачен параболоид. Индикатриса на Dupin.

14. Праволинейни повърхнини. Централна линия на праволинейна повърхнина. Развиваеми повърхнини.

15. Уравнения за производните. Условия за интегруемост на производните.

16. Диференцируема функция върху повърхнина. Диференцируемо изображение между гладки повърхнини. Диференциал на изображение между гладки повърхнини. Ориентируемост на повърхнина

17. Паралелно пренасяне по гладка линия върху повърхнина

18. Геодезични линии на повърхнина

19. Паралелни геодезични координати. Минимално свойство на геодезичните линии

20. Изометрия между две повърхнини. Повърхнини с постоянна Гаусова кривина

21. Конформно изображение между две повърхнини

22. Гладки многообразия, гладки функции и изображения. Допирателни вектори и допирателно пространство в точка на гладко многообразие. Диференциал на гладко изображение.

23. Гладки векторни полета. Комутатор

24. Линейна свързаност. Кривина и торзия на линейна свързаност. Симетрични линейни свързаности.