Теория на екстремалните задачи

примерна изпитна тема, 2019

1. (5 т.) Формулирайте необходимото условие на Ойлер за слаб локален екстремум (т.е. уравнението на Ойлер-Лагранж) за задачата със закрепени краища.

2. (20 т.) Формулирайте и докажете теоремата на Кун-Такър в нейната обща форма за нормирани линейни пространства.

3. (10 т.) Формулирайте принципа на максимума в хамилтонова форма за екстремални задачи от вида

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)\,dt \to \inf \\
&\dot{x} = \varphi(t,x,u), \\
&u \in U, \\
&b_0(t_0, x(t_0)) = 0, \quad b_1(t_1, x(t_1)) = 0,
\end{aligned}$$

където $U \subset \mathbb{R}^m$, b_0 и b_1 са векторно-значни функции, $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ е абсолютно непрекъсната и $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ е ограничена и измерима. Интервалът по времето е изобщо нефиксиран. Разгледайте важните частни случай: фиксиран времеви момент, фиксиран край и свободен край.

4. (5 т.) Решете екстремалната задача

$$\int_0^1 (\dot{x}^2(t) + x^2(t))\,dt \to \inf,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Оценката се изчислява по формулата $2 + N/10$, където N е общият брой точки.