Теория на мярката и интеграла
(интеграл на Лебег)

редовен изпит, 29.06.2017

1. (4+4 т.) Опишете без доказателства конструирането и елементарните свойства на лебеговия интеграл относно призволна мярка.
2. (3+5 т.) Формулирайте и докажете теоремата на Лебег за граничен преход под интеграла.
3. (4 т.) Формулирайте теоремата на Фубини.
4. (10 т.) Докажете, че всяка непрекъсната монотонна функция е диференцируема п.н. (относно лебеговата мярка).
5. Задача. (10 т.) Нека $(X, \mathcal{F}, \mu)$ е пространство с мярка, $f \in M^+(X, \mu)$ и $\lambda > 0$. Докажете неравенството на Чебишов

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f \, d\mu.$$

Докажете с негова помощ, че ако $f \in M^+(X, \mu)$ и $\int_X f \, d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ п.н.

Оценката се формира по формулата

$$2 + \frac{n}{10},$$

където n е броят на получените точки. За успешното взимане на изпита са необходими поне 10 точки.