Теория на мярката и интеграла (интеграл на Лебег)

Задачи за изпит

1. Можем да продължим лебеговата мярка m върху краен затворен интервал до такава върху цялата реална права по следния начин. Разбиваме реалната права на изброимо много крайни затворени интервали с положителна дължина:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

като всеки два интервала могат да имат най-много една обща точка. Казваме, че множестовото $S \subseteq \mathbb{R}$ е измеримо, ако $S \cap I_k$ е измеримо за всяко k. В този случай полагаме

$$m(S) = \sum_{k=1}^{\infty} m(S \cap I_k).$$

Докажете, че:

(а) дефиницията на $m(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}$, не зависи от разбиването $\{I_k\}$;

(б) множеството от измеримите подмножества на $\mathbb{R}$ е σ-алгебра;

(в) m върху $\mathbb{R}$ е пълно адитивна.

2. Нека $(X, \mathcal{F}, \mu)$ е пространство с мярка, $f \in M^+(X, \mu)$ и $\lambda > 0$. Докажете неравенството на Чебишов

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f \, d\mu.$$

Докажете с негова помощ, че ако $f \in M^+(X, \mu)$ и $\int_X f \, d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ п.н.

3. Нека $(X, \mathcal{F}, \mu)$ е пространство с мярка, $f \in M^+(X, \mu)$ и $t > 0$. Полагаме

$$S_f(t) = \{x \in X : f(x) > t\} \quad \text{и} \quad \Psi_f(t) = \mu\big(S_f(t)\big).$$

Докажете, че

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \Psi_f(t) \, dt.$$

Упътване: Първо докажете твърдението за прости функции. След това го обобщете с помощта на теоремата на Б. Леви.

4. Установете връзка между крайните борелови знакопроменливи мерки върху краен затворен интервал и функциите с ограничена вариация върху същия интервал.

5. Нека $f, g \in L(\mathbb{R}, m)$, където m е лебеговата мярка върху реалната права. Докажете, че:

   (а) функцията $f(x-t)g(t)$ е сумируема, като функция на t за почти всяко x;

   (б) $h \in L(\mathbb{R}, m)$, където сме положили

   $$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) \, dm(t);$$

   (в) $\|h\|_L \leq \|f\|_L \, \|g\|_L$.

   Функцията h се нарича конволюция на f и g и се означава с $f * g$. Може да се докаже, че тази операция е комутативна, асоциативна и дистрибутивна (по отношение на събирането).

   Упътване: Първо забележете, че функцията $f(x-t)g(t)$ е измерима като функция на променливите (x, t); приложете теоремите на Тонели и Фубини; използвайте, че $\int_{\mathbb{R}} F(x-t) \, dm(t) = \int_{\mathbb{R}} F(t) \, dm(t)$ за всеки $F \in M^+(\mathbb{R}, m)$ и $x \in \mathbb{R}$.