

# Теория на мярката и интеграла (интеграл на Лебег)

*Примерна изпитна тема*

1. (2+2+2+4 т.) Опишете конструирането на лебеговата мярка върху краен затворен интервал (външна и вътрешна мярка на Лебег, мярка на Лебег). Формулирайте основните свойства на лебеговата мярка върху краен затворен интервал.
2. (2+5+4 т.) Дефинирайте общото понятие за мярка. Опишете без доказателства конструирането на лебеговия интеграл относно мярка. Покажете, че  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема относно мярката  $\mu$  върху  $X$  тогава и само тогава, когато  $|f|$  е интегрируема относно  $\mu$  върху  $X$ .
3. (2+2 т.) Формулирайте дефиницията на знакопроменлива мярка и теоремата на Жордан за декомпозиция на знакопроменлива мярка.
4. (2+8 т.) Формулирайте и докажете теоремата за монотонния граничен преход под знака на интеграла (теоремата на Бепо Леви).
5. (5 т.) Нека  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  е пространство с мярка,  $f \in M^+(X, \mathcal{A})$  и  $\lambda > 0$ . Докажете неравенството на Чебишов

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f d\mu.$$

---

Оценката се формира по формулата

$$2 + \frac{n}{10},$$

където  $n$  е броят на получените точки. За успешното взимане на изпита са необходими поне 10 точки.